

## Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ - ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ: ΟΡΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥΣ, ΟΤΑΝ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ Η ΓΩΝΙΑ

*Λαμπρινίδης Κωνσταντίνος*

*Καθηγητής Μ. Ε.*

[klamprin@sch.gr](mailto:klamprin@sch.gr), [mail@14gym-perist.att.sch.gr](mailto:mail@14gym-perist.att.sch.gr)

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Α) Συμπλήρωση πίνακα ώστε να «παρατηρηθεί» ο σταθερός λόγος και να ορισθεί η κλίση ημιευθείας-ευθείας.

Β) Εξοικείωση με τις έννοιες «απέναντι» και «προσκειμένη» κάθετη πλευρά. Ορισμός εφαπτομένης οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.

Γ) Συμπλήρωση πίνακα ώστε να «παρατηρηθεί» η μεταβολή της εφαπτομένης, όταν μεταβάλλεται η γωνία. Εξήγηση.

Δ) Συμπλήρωση πίνακα ώστε να «παρατηρηθεί» η σταθερότητα δύο λόγων πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Ορισμός ημιτόνου και συνημιτόνου οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου.

Ε) Συμπλήρωση πίνακα ώστε να «παρατηρηθεί» η μεταβολή του ημιτόνου και του συνημιτόνου, όταν μεταβάλλεται η γωνία. Εξήγηση.

### ΣΤΟΧΟΙ

Κύριος στόχος η πιο παραστατική/δυναμική προσέγγιση, σχεδόν ατομικά από τους μαθητές, στους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών και τη μεταβολή τους.

### ΣΧΟΛΙΑ

Διδάχτηκαν σε 2 διδακτικές ώρες, «ακολουθώντας» αρκετά το βιβλίο, με λίγη εμβάθυνση. Χρησιμοποιήθηκαν χρώματα και εφέ κίνησης για να εντυπωσιάσουν, να προκαλέσουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να βοηθήσουν στην εξαγωγή των συμπερασμάτων. Ήταν συνειδητή η επιλογή μου να παρουσιάζονται κάποιες απαντήσεις στην οθόνη του Η/Υ, ώστε να βοηθούνται και να μπορούν να παρακολουθήσουν την εργασία και μαθητές με λιγότερες γνώσεις/ικανότητες.

Ακολουθούν τα 2 φύλλα εργασίας που δόθηκαν στους μαθητές. Πρέπει να σημειωθεί ότι δόθηκαν με διαφορετική (ίσως καλύτερη;) διαμόρφωση 2+2 σελίδων, όπως αποστέλλονται συνημμένα, μαζί με τα αντίστοιχα αρχεία (\*.gsp) του Sketchpad.

### Τ Α Ξ Η Β'

#### 1<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

#### Α) ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΛΙΣΗΣ

Στην οθόνη βλέπουμε μία ημιευθεία  $O\epsilon$ , που σχηματίζει γωνία  $\hat{\omega}$  με την οριζόντια διεύθυνση  $O\chi$ .

Κάνοντας «διπλό κλικ» στο «Εμφάνιση 1» θα εμφανιστεί στην  $O\epsilon$  ένα σημείο  $A$ , η απόστασή του  $AK$  από την οριζόντια  $O\chi$ , καθώς και η οριζόντια απόσταση  $OK$ .

«Πιάστε» με το ποντίκι το σημείο  $A$  και μετακινήστε το κατά μήκος της  $O\epsilon$ , ώστε να συμπληρώσετε τον επόμενο πίνακα, ίσως και με λίγη προσέγγιση στα μήκη και στις διαιρέσεις.

<b>AK</b>	1				1,4
<b>OK</b>		3	4	6	
$\frac{AK}{OK}$					

Πιστεύω ότι (αν κάνετε σωστά τις διαιρέσεις) θα κάνετε κάποια διαπίστωση:


Ο λόγος  $\frac{AK}{OK}$  είναι σ..... (για αυτήν την γωνία  $\hat{\omega}$ )

Με το εργαλείο «Εμφάνιση 2» θα παρουσιαστεί και ο λόγος  $\frac{AK}{OK}$ , και, μετακινώντας πάλι το

A, θα μπορέσετε να ελέγξετε αν συμπληρώσατε καλά την τρίτη γραμμή του πίνακα, και θα βεβαιωθείτε για τη διαπίστωσή σας.

Μετακινήστε τώρα το σημείο M, και μετά πάλι το A. Για κάθε νέα θέση του M ισχύει πάντα η ίδια διαπίστωση όταν μετακινείτε το A;

Ο σταθερός (αντίστοιχα για κάθε τιμή της γωνίας  $\hat{\omega}$ ) αυτός λόγος λέγεται κλίση της ημιευθείας Oe, και παρουσιάζεται καλύτερα σε μορφή ποσοστού, όταν αναφέρεται σε δρόμους,

π.χ. πινακίδα για ανήφορο. 

Βρείτε αυτό το ποσοστό για τον λόγο που έχετε στον πίνακα.  %

Με το «Εμφάνιση 3» θα έχετε την απάντηση, αρκεί να επαναφέρετε το M στην αρχική του θέση ( $\hat{\omega} = 11^\circ$ ), και να έχετε πάλι τις τιμές με τις οποίες συμπληρώσατε τον πίνακα.

Κλίση λέγεται και αν πρόκειται για ολόκληρη ευθεία.

Επίσης λέγεται εφαπτομένη της γωνίας  $\hat{\omega}$ , και γράφεται εφω.

### Β) ΟΡΙΣΜΟΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Στο menu, πάνω δεξιά στην οθόνη, στο «εργασία» επιλέξτε «ορισμ-εφ».

Στην οθόνη έχουμε τώρα ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ και τις μετρήσεις των πλευρών AB, AΓ και της γωνίας  $\hat{B}$ .

**Ερώτηση 1:** Ποια πλευρά είναι απέναντι από τη γωνία  $\hat{B}$ ; Απάντηση: .....

**Ερώτηση 2:** Ποια κάθετη πλευρά είναι προσκείμενη (δίπλα) στη γωνία  $\hat{B}$ ; Απάντηση:.....

Με τα αντίστοιχα εργαλεία που έχουμε στην οθόνη θα επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας. Αν θέλετε επαναλάβετε ώστε να εξοικειωθείτε με τις έννοιες αυτές.

Η εφαπτομένη της γωνίας  $\hat{B}$  ορίζεται ως εξής:

$$\text{εφ}\hat{B} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} = \text{---} \quad (\text{Χρησιμοποιήστε το εργαλείο «εφB»})$$

### Γ) ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Στο menu, στο «εργασία» επιλέξτε «μετ-εφ». Μετακινήστε με το ποντίκι την κορυφή Γ.

**Ερώτηση 3:** Τι παρατηρείτε για τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ABΓ;

Ποιες μεταβάλλονται; Απάντηση: οι πλευρές ....., ..... και οι γωνίες ....., ...

**Ερώτηση 4:** Τι εκφράζει ο λόγος  $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$  ;

**Απάντηση:** την ..... της .....

Με το «Εμφάνιση 1» θα έχετε την εφB. Και μετά, αν θέλετε, την ανάλυσή της

Μετακινώντας την κορυφή Γ συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

$\hat{B}$	10°	20°	30°	40°		50°	60°		70°	80°
ΑΓ										
ΑΒ										
$\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$								2,05		
εφB					1					

**Ερώτηση 5:** Τι παρατηρείτε για τη μεταβολή της εφB όταν μεταβάλλεται η γωνία;

**Απάντηση:** Η εφαπτομένη μεγ..... όταν ..... η γωνία και ..... όταν η γωνία .....

Δώστε εξήγηση, χρησιμοποιώντας την απάντηση της ερώτησης 3 :

**Εξήγηση:** Οι μεταβολές αυτές γίνονται διότι η πλευρά ..... (αριθ.....) μεγ..... ή μ..... αντίστοιχα, ενώ η πλευρά ..... (παρ.....) είναι σ.....

## 2<sup>ο</sup> ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

### Α) ΟΡΙΣΜΟΣ ΗΜΙΤΟΝΟΥ, ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ

Στην οθόνη έχουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τις μετρήσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ και των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  .

**Ερώτηση 1:** Ποια πλευρά είναι απέναντι από τη γωνία  $\hat{B}$  ; Απάντηση: .....

**Ερώτηση 2:** Ποια κάθετη πλευρά είναι προσκείμενη (δίπλα) στη γωνία  $\hat{B}$  ;

Απάντηση: ...

Με τα αντίστοιχα εργαλεία που έχουμε στην οθόνη θα επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας. Αν θέλετε, επαναλάβετε ώστε να εξοικειωθείτε με τις έννοιες αυτές.

Με το εργαλείο « 1 » θα «καθαρίσετε» λίγο το σχήμα.

Μετακινήστε την κορυφή Β και παρατηρήστε πώς αλλάζει το σχήμα, πώς μεταβάλλονται οι πλευρές και οι γωνίες (:) του τριγώνου. Συμπληρώστε τον επόμενο πίνακα.

ΑΓ	4			5		
ΒΓ		5,5			7	
$\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$						
ΑΒ			3,5			4,04
$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$						

Θα διαπιστώσετε ότι οι λόγοι  $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$  και  $\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$  είναι σ..... (για αυτήν τη γωνία  $\hat{B}$ )

Ο πρώτος λόγος ονομάζεται ημίτονο της γωνίας  $\hat{B}$ , και για οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, ορίζουμε ως εξής:

Εκπαιδευτική Πύλη Νοτίου Αιγαίου – www.epyna.gr

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \text{---} \quad (\text{Χρησιμοποιήστε το εργαλείο «ημB»})$$

Ο δεύτερος λόγος ονομάζεται συνημίτονο της γωνίας  $\hat{B}$ , και για οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου, ορίζουμε ως εξής:

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \text{---} \quad (\text{Χρησιμοποιήστε το εργαλείο «συνB»})$$

## B) ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΗΜΙΤΟΝΟΥ ΚΑΙ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΥ

Στο menu, στο «εργασία» επιλέξτε «μετημσον»

Μετακινήστε με το ποντίκι την κορυφή Γ.

**Ερώτηση 3:** Τι παρατηρείτε για τις πλευρές και τις γωνίες του τριγώνου ABΓ; Ποιές μεταβάλλονται;

**Απάντηση:** οι πλευρές ....., ..... και οι γωνίες ....., .....

**Ερώτηση 4:** Τι εκφράζει ο λόγος  $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ ;

**Απάντηση:** το ..... της .....

Με το «Εμφάνιση 1» θα έχετε το ημB. Και μετά, αν θέλετε, την ανάλυσή του.

**Ερώτηση 5:** Τι εκφράζει ο λόγος  $\frac{AB}{B\Gamma}$ ;

**Απάντηση:** το ..... της .....

Με το «Εμφάνιση 2» θα έχετε το συνB. Και, αν θέλετε, την ανάλυσή του.

Μετακινώντας την κορυφή Γ συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

$\hat{B}$	10°		30°		60°		70°		80°
AΓ									
$\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$		0,42							
ημB								0,97	
AB									
$\frac{AB}{B\Gamma}$				0,71					
συνB						0,42			

**Ερώτηση 6:** Τι διαπιστώνετε για τη μεταβολή του ημB όταν μεταβάλλεται η γωνία;

**Απάντηση:** Το ημίτονο μεγ..... όταν ..... η γωνία και ..... όταν η γωνία ..... Δώστε εξήγηση, χρησιμοποιώντας την απάντηση της ερώτησης 3 :

**Εξήγηση:** Οι μεταβολές αυτές γίνονται διότι η πλευρά ..... (αριθ.....) μεγ..... ή μ..... αντίστοιχα, ενώ η πλευρά ..... (παρ.....) είναι σ.....

**Ερώτηση 7:** Τι διαπιστώνετε για τη μεταβολή του συνB όταν μεταβάλλεται η γωνία;

**Απάντηση:** Το συνημίτονο μικ..... όταν ..... η γωνία και ..... όταν η γωνία ..... Δώστε εξήγηση, χρησιμοποιώντας την απάντηση της ερώτησης 3 :

**Εξήγηση:** Οι μεταβολές αυτές γίνονται διότι η πλευρά ..... (αρ.....) μ..... ή μ..... αντίστοιχα, ενώ η πλευρά ..... (παρ.....) είναι .....