Οι κατανοήσεις των παιδιών για την έννοια της μεταβλητής κατά την εμπλοκή τους σε διερευνητικές δραστηριότητες σε υπολογιστικό περιβάλλον

Κολέτσος Θεόδωρος
Καθηγητής Μαθηματικών του 3ου Λυκείου Αργυρούπολης - Υποψήφιος δρ. στο τμήμα ΦΠΨ του Παν/μίου Αθηνών.

Περίληψη
Το άρθρο αυτό περιγράφει τις κατανοήσεις οι οποίες αναπτύχθηκαν από πέντε ομάδες συνεργαζόμενων παιδιών για την έννοια της μεταβλητής, κατά την ενασχόλησή τους με τις δραστηριότητες μαθηματικού μικρόκοσμου βασισμένου σε εργαλεία υπολογιστικής τεχνολογίας. Ποιοτική ανάλυση των δεδομένων της έρευνας υποστηριζόμενη και από ορισμένα ποσοτικά δεδομένα, δείχνει ότι όταν τα παιδιά εμπλέκονται σε δραστηριότητες και καταστάσεις οι οποίες έχουν νόημα για αυτά, μπορούν να αναπτύσσουν κατανοήσεις για ορισμένες πτυχές της έννοιας της μεταβλητής.
Λέξεις κλειδιά: Μεταβλητή, Μεταβολέας, Συμμεταβολή.

Abstract
This paper describes the understandings which five small groups of cooperating children developed during their engagement with the activities of a Mathematical microworld based on computational tools. Qualitative analysis supported by quantitative data, indicates that children engaged in activities and situations meaningful to them, may develop understandings about some facets of the concept of variable.

Το θεωρητικό πλαίσιο

Για τη μελέτη των κατανοήσεων τις οποίες τα παιδιά αναπτύσσουν για την έννοια της μεταβλητής, υιοθετούνται από την παρούσα έρευνα οικοδομιστικές και αλληλεπιδραστικές αντιλήψεις για τη μάθηση των μαθηματικών.

“Παραδοχή πρώτη: Οι οικοδομιστές θεωρούν τα Μαθηματικά σαν μια ανθρώπινη δημιουργία, εξελισσόμενη μέσα στα πολιτιστικά πλαίσια....Υποθέτουν ότι μέσα από τις δραστηριότητες του στοχασμού και της επικοινωνίας και της διαπραγμάτευσης της έννοιας, οι ανθρώπινες υπάρξεις κατασκευάζουν μαθηματικές έννοιες οι οποίες τους επιτρέπουν να οργανώσουν την εμπειρία και να λύσουν προβλήματα” (Confrey,1991, p.114).

Αναφορές για τις δυσκολίες κατανόησης βασικών Αλγεβρικών εννοιών και μάλιστα της θεμελιώδους έννοιας της μεταβλητής από τους μαθητές, αλλά και τους φοιτητές, έχουν γίνει κατ’ επανάληψη από πολλούς ερευνητές (Kuchemann 1981, Hoyles & Noss 1986, Sutherland, 1987, Warren 1999).

Κατά τον Nemirovski η εμπλοκή των παιδιών σε διάφορες καταστάσεις αλλαγής (π.χ. ταχύτητας, τιμών, σχημάτων), βοηθάει τα παιδιά να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής σαν μια έκφραση συνεχούς μεταβολής μέσα σε ένα σύνολο τιμών (εδώ από 1 έως 80), και να τροποποιήσουν έτσι την περιορισμένης εμβέλειας κατανόησή της σαν αγνώστου (Nemirovski, 1993, p.29).

Οι περισσότερες μέχρι σήμερα έρευνες εξετάζουν τις κατανοήσεις των παιδιών για την έννοια της μεταβλητής αναλύοντας τις απαντήσεις τους σε διάφορες γραπτές ερωτήσεις.

Κατά την Warren όμως (1999, σελ. 314 και 319) «Το πλαίσιο της ερώτησης από μόνο του θα μπορούσε να περιορίσει τους τύπους των απαντήσεων που δόθηκαν. ...Δεύτερον το μέσον με το οποίο τίθενται οι ερωτήσεις πρέπει να λαμβάνεται υπόψη, όταν φτάνουμε σε συμπεράσματα από τις απαντήσεις των παιδιών».

Στην παρούσα έρευνα το θέμα αυτό αντιμετωπίστηκε και στις δύο διαστάσεις του ως εξής:

I. Τα παιδιά εμπλέκονται σε ερωτήματα παρόμοια με αυτά των προηγούμενων ερευνών, αλλά και σε νέα όπως η μεταβλητή σαν συνεχής μεταβολή όπως προτείνεται από το Nemirovski

(1993), αφού όμως πρώτα τίθενται στο κατάλληλο πλαίσιο μέσα από τη λύση προβλήματος της σχολικής καθημερινότητας που ενδιαφέρει τα παιδιά.

ΙΙ. Ο ερευνητής επέλεξε το ρόλο του συμμετέχοντος παρατηρητή στη έρευνα αυτή, οπότε μπορούσε να διατυπώνει όταν χρειαζόταν διευκρινιστικές ερωτήσεις σχετικά με τις αντιλήψεις των παιδιών για την έννοια της μεταβλητής.

Στην παρούσα έρευνα προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε ενδείξεις για τις κατανοήσεις τις οποίες πιθανόν αναπτύσσουν οι μαθητές για τις έννοιες της μεταβλητής και της συνάρτησης κατά την ενασχόλησή τους με τις δραστηριότητες του μικρόκοσμου των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, με έμφαση σε εκείνες που γίνονται με τη χρήση του διερευνητικού εργαλείου του «Μεταβολέα». Εδώ θα αναφερθούμε μόνο στην έννοια της μεταβλητής.

Μεθοδολογία

Η έρευνα είναι ποιοτική με περιγραφική και οικοδομιστική ανάλυση των δεδομένων, και βασική μεθοδολογία τη Μελέτη Περιπτώσεων (case studies).

Επειδή όμως κρίθηκε σκόπιμο να συνδυαστούν εθνογραφικές και ποσοτικές μέθοδοι ανάλυσης των δεδομένων, έγινε προέλεγχος και μετέλεγχος των πέντε ομάδων παιδιών οι οποίες μελετήθηκαν στην έρευνα αυτή, και συλλέχτηκαν ποσοτικά δεδομένα υποστηρικτικά των ποιοτικών δεδομένων. Προηγήθηκε πιλοτική έρευνα της μελέτης και έγιναν οι κατάλληλες προσαρμογές και τροποποιήσεις, πριν τη διεξαγωγή της κύριας έρευνας.

Η συλλογή των δεδομένων έγινε με μαγνητοφώνηση και βιντεοσκόπηση των δραστηριοτήτων των πέντε ομάδων, με αποθήκευση σε δισκέτες των υπολογιστικών δραστηριοτήτων των παιδιών, και με τις σημειώσεις του ερευνητή.

Από τη μελέτη των δεδομένων ανιχνεύτηκαν οι τρόποι με τους οποίους τα παιδιά χρησιμοποίησαν και κατανόησαν την έννοια της μεταβλητής κατά την εμπλοκή τους με τις δραστηριότητες του μικρόκοσμου. Οι κατηγορίες κατανόησης αναδύθηκαν μέσα από τα δεδομένα και δεν χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα για επαλήθευση κατηγοριών που προϋπήρχαν.

Χτίζοντας πάνω στις προηγούμενες έρευνες, μελετήσαμε τις κατανοήσεις των παιδιών τις οποίες αυτά αναπτύσσουν για την έννοια της μεταβλητής, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στα παρακάτω στοιχεία:

1. Το περικείμενο (context) μέσα στο οποίο τίθενται τα παιδιά όταν εξετάζονται οι κατανοήσεις τους για την έννοια αυτή. Για το λόγο αυτό δημιουργήσαμε το περιβάλλον μάθησης του μικρόκοσμου των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, ώστε τα παιδιά να εμπλακούν σε δραστηριότητες οι οποίες έχουν προσωπικό νόημα γι' αυτά. Αυτό γίνεται μέσα από την ενασχόληση των παιδιών με το εξής πρόβλημα-σενάριο της σχολικής καθημερινότητας:

«Ο άνθρωπος που έχει το κυλικείο του σχολείου πουλάει μέχρι σήμερα τυρόπιτες σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Η μία διάστασή τους είναι 5 cm, και η περίμετρός τους 16 cm. Επειδή κατά τη γνώμη του το κέρδος του από αυτές τις τυρόπιτες είναι μικρό, έκανε προς τις Μαθητικές Κοινότητες του σχολείου την πρόταση να πουλάει τυρόπιτες με την ίδια περίμετρο, το ίδιο πάχος, την ίδια ποιότητα και αναλογία υλικών, και στην ίδια τιμή. Το μόνο που θα αλλάξει είναι οι διαστάσεις τους και συγκεκριμένα θα κάνει τις τυρόπιτες πιο στενόμακρες, εφόσον βέβαια συμφωνήσουν και οι μαθητές, και δεν κάνουν κάποια διαφορετική πρόταση.

Κατά τη γνώμη σας πρέπει οι μαθητές να δεχτούν την πρόταση του κυλικειάρχη; Μήπως υπάρχουν διαστάσεις για τις νέες τυρόπιτες οι οποίες συμφέρουν περισσότερο τους μαθητές, και με αυτές τις διαστάσεις να ζητήσουν να φτιάχνει τις τυρόπιτες από δω και πέρα ο κυλικειάρχης, και ποιες είναι αυτές οι διαστάσεις;».

Ο μικρόκοσμος περιλαμβάνει δραστηριότητες με Η/Υ και χωρίς Η/Υ. Στο περιβάλλον αυτό μάθησης ενθαρρύνεται η επικοινωνία μεταξύ των μαθητών, ο στοχασμός (reflection), η διαπραγμάτευση μαθηματικών εννοιών και νοημάτων, η πολλαπλή αναπαράσταση των εννοιών, και ευρεία χρήση εκπαιδευτικών μέσων και υλικών.

2. Με την ενσωμάτωση στο μικρόκοσμο αυτό δραστηριοτήτων με τη χρήση του διερευνητικού εργαλείου του Μεταβολέα. Η χρήση του εργαλείου αυτού μας έδωσε μεταξύ άλλων τη δυνατότητα:
ι. Να ασχοληθούν τα παιδιά με την έννοια της μεταβλητής σαν ένα τρόπο συνεχούς μεταβολής όπως προτείνεται από σύγχρονους ερευνητές, αντί της περιορισμένης εμβέλειας κατανόησης της μεταβλητής σαν αγνώστου (Nemirovski,1993,p.29).
ιι. Να εμπλακούν τα παιδιά σε δραστηριότητες στις οποίες έχει ενσωματωθεί η έννοια των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων και να παρατηρήσουν τον τρόπο συμμεταβολής τους.

Το διερευνητικό εργαλείο «Μεταβολέας»
Το εργαλείο αυτό είναι εκπαιδευτικό λογισμικό το οποίο αναπτύχθηκε στα πλαίσια του προγράμματος του YDEES «Component Logo with a Variation tool" (Kynigos et al, 1997). Κατά το χρόνο διεξαγωγής της έρευνας αυτής το εργαλείο αυτό περιλάμβανε τρία στοιχεία-ψηφίδες. Αργότερα προστέθηκαν και άλλα στοιχεία. Στην ευρύτερη λειτουργία του, το διερευνητικό εργαλείο αυτό μπορεί να προσαρτηθεί σε οποιοδήποτε στοιχείο σχεδιασμένο να ενσωματώνει συστηματική μεταβολή και όταν αυτό συμβαίνει, παρέχει τη δυνατότητα στο χρήστη με απευθείας χειρισμό να αλλάζει διαδοχικά την αριθμητική τιμή της μεταβαλλόμενης παραμέτρου και ταυτόχρονα να παρακολουθεί την συμπεριφορά των μεταβλητών μερών σε σχέση με τα άλλα και τα σταθερά.
Στην ψηφίδα «γλώσσα» μπορούν να γραφούν διαδικασίες με το συμβολικό κώδικα οι οποίες συνήθως ενσωματώνουν μία ή περισσότερες μεταβλητές ή παραμέτρους με τις οποίες συμβολίζονται αντίστοιχα μεταβλητά μεγέθη, της μαθηματικής έννοιας που ενσωματώνουν.
Στο δεύτερο στοιχείο του Μεταβολέα εμφανίζεται μία μπάρα για κάθε μεταβλητή της διαδικασίας, και υπάρχει η δυνατότητα να καθοριστούν από το χρήστη τα όρια των τιμών τις οποίες θα λαμβάνει κάθε παράμετρος. Τις τιμές αυτές τις λαμβάνει διαδοχικά η μεταβλητή ή με κάποιο βήμα του οποίου το εύρος επιλέγεται κατά βούληση από το χρήστη και με απευθείας χειρισμό σύροντας ένα δρομέα πάνω στην αντίστοιχη μπάρα.
Με το σύρσιμο ενός δρομέα-«κουμπιού» πάνω στη μπάρα με τις τιμές μιας μεταβλητής, προκαλείται συνεχής αλλαγή στις τιμές της και αντίστοιχη μεταβολή στη γραφική αναπαράσταση του σχήματος που κατασκευάζει η παραπάνω διαδικασία.
Έτσι πάνω στην τρίτη ψηφίδα «γραφικά» στην οποία έχει ήδη σχηματιστεί το σχήμα το οποίο κατασκευάζεται με τη διαδικασία η οποία έχει γραφεί στο πρώτο στοιχείο, δίνονται αντίστοιχες μεταβολές και οπτικές αναπαραστάσεις των μεταβαλλόμενων μερών του σχήματος αυτού σε σχέση με τα άλλα μεταβλητά ή σταθερά μέρη του, μετά από κατάλληλη ενεργοποίηση.
Η μεταβολή αυτή φαίνεται συνεχής σαν εξέλιξη του σχήματος-αντικειμένου και όχι σαν ένα σύνολο στιγμιότυπων ενός μεταβαλλόμενου αντικειμένου. Αυτό είναι σημαντικό για την δυναμική αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών και σχέσεων διότι παρέχει την αίσθηση της συνεχούς εξέλιξής τους.

Αποτελέσματα

Α. Κατανοήσεις για την έννοια της μεταβλητής
Οι κατηγορίες οι οποίες αναδύθηκαν από τα δεδομένα και αποτελούν την ερμηνευτική βάση για την ανάλυση των δεδομένων της έρευνας τα οποία αφορούν την χρήση και κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής από τις πέντε περιπτώσεις μαθητών που μελετήθηκαν, είναι οι εξής:
Α. Ταυτοποίηση και χρήση της έννοιας της μεταβλητής
1. **Αναγνώριση και χρήση της έννοιας της μεταβλητής**. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές χρησιμοποίησαν και συμβόλισαν με κάποιο γράμμα ένα άγνωστο ή μεταβαλλόμενο μέγεθος σε οποιοδήποτε πλαίσιο: Συμβολικό κώδικα-Μεταβολέα ή χαρτί και μολύβι.
Πράγματι και οι πέντε ομάδες των παιδιών που μελετήθηκαν χρησιμοποίησαν μεταβλητή για το συμβολισμό της άγνωστης πλευράς των ορθογωνίων τόσο στην διαδικασία κατασκευής

ορθογωνίων παραλληλογράμμων με σταθερή περίμετρο στο συμβολικό κώδικα, όσο και στο πλαίσιο μολύβι-χαρτί.

2. Κατανόηση της μεταβλητής **σαν γενικό αριθμό**, ο οποίος αντιπροσωπεύει ή μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ή κατά την Warren (1999) τουλάχιστον περισσότερες από μία τιμές. Και οι πέντε ομάδες κατανόησαν τη μεταβλητή σαν γενικό αριθμό.

3. Κατανόηση της μεταβλητής **σαν στοιχείο ενός συνόλου τιμών**. Όπως φαίνεται από το σύνολο των δεδομένων, όλες οι ομάδες κατανόησαν τη μεταβλητή σαν στοιχείο ενός συγκεκριμένου συνόλου τιμών (1-8).

4. Κατανόηση της μεταβλητής **σαν ένα τρόπο συνεχούς μεταβολής** σε ένα ορισμένο σύνολο τιμών. Ο έλεγχος της κατανόησης της μεταβλητής από τα παιδιά με αυτόν τον τρόπο γίνεται εδώ μέσα από δραστηριότητες των παιδιών με το διερευνητικό εργαλείο του Μεταβολέα, και αποτελεί καινοτομία και ουσιαστική διαφορά από προηγούμενες έρευνες στις οποίες η πτυχή αυτή δεν εξετάζεται.

Στο παρακάτω στιγμιότυπο απεικονίζεται ο τρόπος με τον οποίο τα παιδιά αντιδρούν και αλληλεπιδρούν, παρατηρώντας την εικονική αναπαράσταση των εξελικτικά μεταβαλλόμενων ορθογωνίων και των τιμών του x, κατά τη διερεύνηση της διαδικασίας που τα ίδια έγραψαν με το συμβολικό κώδικα.

[Επεξήγηση συμβόλων: Μ1 μαθητής 1, Μ2 ο άλλος μαθητής της ομάδας, Ε ερευνητής].

Μ1:	Ωχ!...Γίνεται πιο...
Μ2:	Πιο μακρουλό.
Μ1:	Μεγαλώνει το πλάτος του.
Μ2:	Όταν το πηγαίνω πιο πίσω μεγαλώνει ..το μήκος του..
Μ1:	Μεγαλώνει το μήκος του και όσο πιο δεξιά μεγαλώνει το πλάτος του. Κοίτα πως έγινε! Πόσο στενόμακρο έγινε!
Ε:	Α, μπράβο! Ναι. Ως προς το εμβαδόν τώρα τί βλέπετε; Πότε θα γίνεται ίσως το μεγαλύτερο;
Μ1:	Όταν είναι..
Μ2:	Το εμβαδόν;
Μ1:	Όταν είναι στο 30.
Ε:	Α, μπράβο.
Μ2:	Το μεγαλύτερο ναι, όταν είναι στη μέση [των δυνατών τιμών του x]
Ε:	Έτσι.
Μ1:	Για το μηδέν, πόσο [στενό] γίνεται.

Στιγμιότυπο 1: Κατανόηση της έννοιας της μεταβλητής σαν έκφραση συνεχούς μεταβολής.

Η αλληλεξάρτηση και συμμεταβολή του μήκους και του πλάτους αναπαρίσταται τώρα και εικονικά στην οθόνη, τα παιδιά το παρατηρούν και το σχολιάζουν.

Ταυτόχρονα παρατηρούν:

Την εξελικτική μεταβολή του σχήματος των ορθογωνίων, καθώς τα παιδιά μεταβάλλουν τις τιμές της μεταβλητής με την οποία είχαν συμβολίσει τη μια διάσταση, μετακινώντας το δρομέα πάνω στη μπάρα με τις τιμές της. Από τις εκφράσεις των παιδιών συνάγουμε ότι το ενδιαφέρον τους για τα τεκταινόμενα αυξάνεται. Η φράση του Μ1 [Μ1: Ωχ! Γίνεται..] δείχνει την αμεσότητα της ανατροφοδότησης που παρέχει το πρόγραμμα στις ενέργειές τους πάνω στη μπάρα με τις τιμές της μεταβλητής. Αυτό αξιοποιείται από τα παιδιά και συνδέουν άμεσα τις τιμές της μεταβλητής με την συνεχή μεταβολή τόσο του σχήματος των ορθογωνίων, όσο και των πλευρών του, όπως προκύπτει από τη φράση του Μ2 [Μ2: όταν το πηγαίνω πιο πίσω μεγαλώνει... το μήκος του]. Εννοεί δηλαδή ότι μετακινώντας προς τα αριστερά το δρομέα, άρα επιλέγοντας μικρότερες τιμές της μεταβλητής x, μεγαλώνει το μήκος των ορθογωνίων. Μετά ο Μ2 συμπληρώνει με έκπληξη ότι όταν μετακινούν με το ποντίκι το δρομέα προς τα δεξιά και επομένως όταν επιλέγουν μεγαλύτερες τιμές του x, τότε μεγαλώνει το πλάτος. Δεν παύουν όμως τα παιδιά να έχουν ταυτόχρονα την αίσθηση της εξελικτικής μεταβολής του σχήματος των ορθογωνίων σαν ένα όλο, αφού ο Μ2 συμπληρώνει την παραπάνω φράση του με φράση που αναφέρεται σε ολόκληρο το ορθογώνιο:

-Μ2: Κοίτα πώς έγινε! Πόσο στενόμακρο έγινε!

Η εξελικτική αυτή μεταβολή του σχήματος των ορθογωνίων θεωρούμενου σαν όλου, αλλά και των μερών του- πλευρών και εμβαδού- παρέσχε στα παιδιά τις εξωτερικές εκείνες αναπαραστάσεις οι οποίες φαίνεται ότι τα ενδυνάμωσαν ώστε να αναπτύξουν κατανοήσεις για τις έννοιες:
της μεταβλητής σαν ένα τρόπο συνεχούς μεταβολής στο σύνολο τιμών 1 έως 80.
Τη συμμεταβολή μήκους και πλάτους.
Συνδέουν επομένως τα παιδιά ρητά τις τιμές της μεταβλητής x τόσο με τις διαστάσεις, όσο και με το σχήμα των ορθογωνίων και το αντίστοιχο εμβαδόν τους.
Ο ερευνητής εδώ παρεμβαίνει και προτρέπει τα παιδιά να παρατηρήσουν και τις μεταβολές του εμβαδού, από τις οποίες θα εξαρτηθεί και η απάντηση τους στο πρόβλημα που προσπαθούν να λύσουν. Τα παιδιά ανταποκρίνονται και με αντίστοιχες ενέργειες στον δρομέα, διαπιστώνουν ότι το μεγαλύτερο εμβαδόν επιτυγχάνεται όταν ο δρομέας και επομένως το x, παίρνει τη τιμή 40, άρα η τετράγωνη τυρόπιτα συμφέρει τα παιδιά. Παρατηρούμε εδώ τη συμβολή και τη σημασία της οικειοποίησης της χρήσης του Μεταβολέα στην εύρεση της μέγιστης τιμής του εμβαδού των ορθογωνίων. Αυτό έγινε με απευθείας χειρισμό και την ταυτόχρονη παρουσία εικονικών (ορθογώνια), συμβολικών (διαδικασία) και αριθμητικών αναπαραστάσεων (τιμές της μεταβλητής) στην οθόνη. Η ενασχόληση των μαθητών με τους τρεις αυτούς τρόπους μάθησης, όπως έχουν περιγραφεί από τον Bruner (enactive, iconic and symbolic), σε υπολογιστή και εφόσον αυτός χρησιμοποιηθεί κατάλληλα, ενδυναμώνει και ενθαρρύνει την εννοιολογική μάθηση, σε αντιδιαστολή με την αλγοριθμική-εργαλειακή κατανόηση (Searl, 1997, p.40).

Β. Διάκριση της έννοιας

Αναγνώριση της μεταβλητής σαν μαθηματικής έννοιας και εργαλείου για τη λύση προβλημάτων και διάκριση των μεταβλητών ποσοτήτων από τις σταθερές ποσότητες. Π.χ. πλευρές ορθογωνίων μεταβλητές, γωνίες ορθογωνίων σταθερές, περίμετρος σταθερή.

Γ. Γενίκευση

1. Εξετάζεται η χρήση μεταβλητής σε γενικεύσεις και συναρτησιακές σχέσεις. Εάν δηλαδή οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μεταβλητή σε πράξεις γενίκευσης. Εδώ περιλαμβάνεται και η κατανόηση της συμμεταβολής αλληλοεξαρτώμενων ποσοτήτων. Τα παιδιά ασχολήθηκαν με δύο τέτοιες περιπτώσεις:
Τη γενίκευση της σχέσης αριθμητικού υπολογισμού της μιας διάστασης των ορθογωνίων παραλληλογράμμων από την άλλη.
Τη γενίκευση του γνωστού κανόνα εύρεσης του εμβαδού ορθογωνίων παραλληλογράμμων, σε κανόνα εύρεσης εμβαδού ορθογωνίων με σταθερή περίμετρο.
Οι Hideki και Takeshi (1997) διακρίνουν δύο τύπους γενίκευσης: τη γενίκευση αντικειμένου σε αλγεβρική κατάσταση και τη γενίκευση μεθόδου σε Γεωμετρική κατάσταση. Κατά τους Hoyles και Noss (1987b) γενίκευση πραγματοποιείται όταν το εύρος της εφαρμογής της έννοιας η οποία πρώτα χρησιμοποιήθηκε σαν εργαλείο, επεκτείνεται συνειδητά από μια ειδική σε μια πιο γενική περίπτωση.

<u>Πίνακας 1:</u> Σχέσεις τις οποίες βρήκαν οι πέντε ομάδες μαθητών για τον υπολογισμό της μιας διάστασης από την άλλη (διατηρείται η γραφή των παιδιών).

Περίπτωση μελέτης	Αριθμητική σχέση	Αλγεβρική σχέση

α΄ ομάδα	16-(5+5):2	[16-(x+x)]/2 και 8-x
β΄ ομάδα	16-(5+5)/2	(16-[x+x]):2
γ΄ομάδα	(16-5 . 2):2	(16-x*2):2
δ΄ ομάδα	Λεκτικά μόνο: Περίμετρος-πλάτος.2/2	[16 εκ.-(x*2)]/2=y
ε΄ ομάδα	(16:2)-5	π=8-:α [π=πλάτος]

Κατανόηση της "μη κλειστότητας" μιας αλγεβρικής έκφρασης. Οι τέσσερις από τις πέντε ομάδες παιδιών κατανόησαν την «μη κλειστότητα» της αλγεβρικής σχέσης που βρήκε κάθε ομάδα και η οποία έκφραζε το πλάτος σε σχέση με το μήκος. Δυσκολεύτηκαν σημαντικά όμως και μάλλον δεν κατανόησαν το θέμα αυτό τα παιδιά της β΄ ομάδας.
Οι κατηγορίες κατανόησης της μεταβλητής και των διαφόρων πτυχών της όπως αυτές προέκυψαν από τα δεδομένα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 2: Οι κατανοήσεις των παιδιών για την έννοια της μεταβλητής, στο πλαίσιο του μικρόκοσμου των ορθογωνίων παραλληλογράμμων με σταθερή περίμετρο.

	ΤΑΥ-	ΤΟ-	ΠΟΙ-	ΗΣΗ	ΓΕΝΙ-	ΚΕΥΣΗ	ΔΙΑΚΡΙΣΗ
Ομά-δα	Χρήση της έννοι-ας της με-ταβλητής και σύν-δεσή της με την έννοια της μεταβολής	Κατανό-ησή της σαν γενικού αριθμού	Κατανό-ησή της σαν στοι-χείο ενός συνόλου τιμών	Χρήση δύο μετα-βλητών	Γενίκευση σχέσεων υπολογι-σμού: 1. της μιας διά-στασης από την άλλη 2. του εμβαδού.	Κατανό-ηση "μη κλει-στότητας" αλγε-βρικής έκφρα-σης	Διάκριση σταθερών και μετα-βλητών ποσο-τήτων
Α΄	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Β΄	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Όχι	Ναι
Γ΄	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Όχι
Δ΄	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι
Ε΄	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι	Ναι

Στοιχεία από την ανάλυση του προελέγχου και μετελέγχου των πέντε ομάδων
Στις πέντε ομάδες των παιδιών οι οποίες μελετήθηκαν στην κύρια έρευνα δόθηκε πριν και μετά τις δραστηριότητες προετοιμασμένη από τον ερευνητή γραπτή δοκιμασία-test, το οποίο συμπληρώθηκε από τους μαθητές.

Πίνακας 3 : Αριθμός ορθών απαντήσεων στο test της κύριας έρευνας

Έννοια-πλαίσιο	ΠΡΙΝ αριθμός Ορθών απαντήσεων	ΠΡΙΝ % ορθές απαντήσεις	ΜΕΤΑ αριθμός ορθών απαντήσεων	ΜΕΤΑ % ορθές απαντήσεις	Αριθμός Δυνατών Απαντήσεων
Ορθογώνιο	38	90.47	36	85.7	42
Συμβολικός κώδικας	1	8.33	11	91.66	12
Μεταβλητή	15	50.00	30	100	30
Συνάρτηση	21	87.5	23	95.83	24
ΣΥΝΟΛΟ	75	69.4	100	92.59	108

Παρατηρούμε μια σημαντική αύξηση στον αριθμό των ορθών απαντήσεων τόσο στο σύνολο όσο και στα επιμέρους ζητήματα.
Ιδιαίτερα αξιοσημείωτη αύξηση παρατηρείται στον αριθμό των ορθών απαντήσεων οι οποίες αφορούν την έννοια της μεταβλητής και συνακόλουθα την υλοποίηση γενικεύσεων για τις οποίες τα παιδιά ελάχιστη ή καθόλου προηγούμενη εμπειρία διέθεταν.

Μερικά ποιοτικά στοιχεία των δεδομένων της γραπτής δοκιμασίας:
Ενώ στον προέλεγχο (pre-test ερώτηση 6) τα παιδιά αντιλαμβάνονται τη μεταβλητή κυρίως σαν άγνωστο, στον μετέλεγχο (post-test) μετακινούνται προς την σφαιρικότερη αντίληψη της μεταβλητής σαν μεταβαλλόμενο μέγεθος και συνδέουν την έννοια της μεταβλητής με την έννοια της μεταβολής.
Ενώ στο pre-test (ερωτήσεις 7 και 8) τα παιδιά αδυνατούν να υπολογίσουν τη μια διάσταση σε σχέση με την άλλη και την περίμετρο, στο post-test όχι μόνο το επιτυγχάνουν αλλά χρησιμοποιούν τον ίδιο τρόπο τον οποίο τα ίδια είχαν ακολουθήσει κατά την ενασχόλησή τους με τον μικρόκοσμο, και συγκεκριμένα κατά το γράψιμο της διαδικασίας με το συμβολικό κώδικα στην ψηφίδα «Γλώσσα», αν και υπήρχαν δυνατότητες και για άλλες επιλογές.
Αυτό ερμηνεύεται με την πιθανολόγηση για την δημιουργία ισχυρών νοητικών κατασκευών από τα παιδιά για το θέμα αυτό, μέσα από τις δραστηριότητες στον μικρόκοσμο για:
I. Τον υπολογισμό της μιας διάστασης από την άλλη με συγκεκριμένες αλλά διαφορετικές τιμές πρώτα.
II. Την αφήγηση κατόπιν αυτού του τρόπου υπολογισμού, και με τη γενίκευσή του στη συνέχεια με τη χρήση μεταβλητής.
III. Την διερεύνηση της διαδικασίας που έγραψαν στο συμβολικό κώδικα με τον Μεταβολέα.
Το γεγονός αυτό αποτελεί μια επιπλέον ένδειξη ότι πιθανόν τα παιδιά συνέδεσαν το πλαίσιο του Μεταβολέα με το πλαίσιο των μαθηματικών σε μολύβι και χαρτί, και μετέφεραν τη γνώση, εμπειρία και μεθόδους τις οποίες απέκτησαν στο πρώτο για τον τρόπο μεταβολής της μιας διάστασης από την άλλη στο δεύτερο.
Ενώ πριν (ερώτηση 8) δεν αποδέχονται οι περισσότεροι τη “μη κλειστότητα” της αλγεβρικής έκφρασης υπολογισμού της μιας διάστασης από την άλλη (γράφουν π.χ. 35-α=β), μετά οι περισσότεροι αποδέχονται τη μη κλειστότητα και γράφουν απλά 35-α.

Συμπέρασμα

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι όταν τα παιδιά εμπλέκονται σε ενδιαφέρουσες για αυτά δραστηριότητες και δημιουργείται το κατάλληλο πλαίσιο, μπορούν να αναπτύσσουν κατανοήσεις για ορισμένες πτυχές της έννοιας της μεταβλητής.
Πράγματι κατά την ενασχόλησή τους με τις δραστηριότητες του μαθηματικού μικρόκοσμου των ορθογωνίων παραλληλογράμμων, χρησιμοποίησαν μεταβλητή και υπάρχουν ενδείξεις ότι τα παιδιά πιθανόν ανέπτυξαν ορισμένες κατανοήσεις για την έννοια αυτή. Πέρα από τις καθιερωμένες αντιλήψεις των παιδιών για τη μεταβλητή, όπως π.χ. σαν άγνωστο, σαν γενικό αριθμό, σαν στοιχείο ενός συνόλου τιμών, τα παιδιά εδώ φαίνεται ότι συνέδεσαν τη μεταβλητή με την έννοια της συνεχούς μεταβολής κατά τις δραστηριότητές τους με το διερευνητικό εργαλείο του Μεταβολέα. Πιθανόν μάλιστα να την κατανόησαν σαν μια έκφραση συνεχούς μεταβολής στο σύνολο τιμών από 1 έως 80. Από την ανάλυση των δεδομένων φαίνεται ότι τα παιδιά μπορούν μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες, να κατανοούν την συναφή με τη μεταβλητή έννοια των συμμεταβαλλόμενων ποσοτήτων όπως μήκος-πλάτος των ορθογωνίων με σταθερή περίμετρο και να βρίσκουν τον τρόπο συμμεταβολής τους. Επιπλέον με κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις μπορούν τότε να γενικεύουν μεθόδους και κανόνες, όπως π.χ. τον τρόπο υπολογισμού της μιας διάστασης των ορθογωνίων από την άλλη.

Βιβλιογραφία

Confrey J. (1991). “Learning to listen: A Student’s Understanding of Powers of Ten” in Glasersfeld E. “Radical Constructivism in Mathematics Education”. Kluwer Academic Publishers, the Netherlands. p.111-138.

Hideki Iwasaki, Takeshi Yamaguchi (1997). “The cognitive and Symbolic Analysis of the Generalization Process: The comparison of Algebraic Signs with Geometric Figures”. Paper presented in the 21st conference of the PME, vol.3, p.105-112. Errki Pehkonen, Lahti, Finland.
Kynigos C, (1993). “Children’s inductive thinking during intrinsic and Euclidean geometrical activities in a computer programming environment”. Educational studies in Mathematics 24:177-197. Kluwer Academic publishers, the Netherlands.
Nemirovski R. (1993). “Mathematical Narratives” version 27-6-94. To appear in a book on approaches to the early introduction of algebra, based on the contributions presented in a seminar organized by CIRADE, at the University of Quebec, Montreal, May 1993.
Trigueros, M. & Urrsini, S. (1999). “Does the understanding of variable evolve through schooling?”. Proceedings of the 23rd Conference of the IGPME, vol.4(pp.273-280). Orit Zaslavski (ed). Haifa-Israel.
Warren Eliz., (1999). “The concept of a variable; gauging students understanding”. Proceedings of the 23rd Conference of the IGPME, vol.4(pp.313-320). Orit Zaslavski (ed). Haifa-Israel.
Zehavi, N. & Mann, G. (1999). “ Teaching mathematical modeling with a computer algebra system”. Proceedings of the 23rd Conference of the IGPME, vol.4(pp.345-352). Orit Zaslavski (ed). Haifa-Israel.