

ΤΟ ΟΡΙΟ ΜΕ ΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΛΟΓΙΣΜΙΚΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.

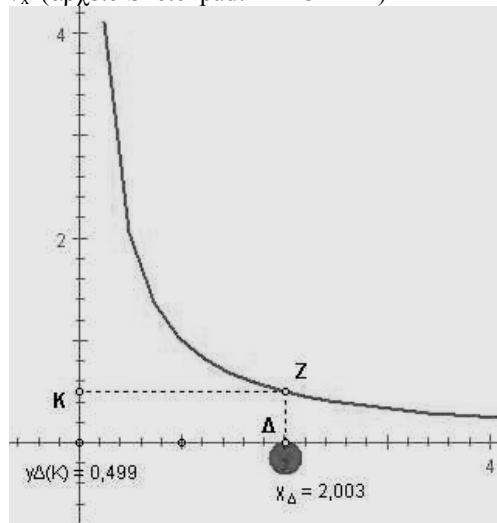
Ζάφειρας Παναγιώτης

Μαθηματικός Β΄θμιας Εκπ., Επιμορφωτής Ενδοσχολικής Επιμόρφωσης
pzafair@sch.gr <http://users.sch.gr/pzafair>

Η εισήγηση αυτή διαπραγματεύεται τη δυναμική των λογισμικών των μαθηματικών, στη διδακτική τους εφαρμογή στην τάξη, με κοινό σημείο αφετηρίας την έννοια του ορίου, (Α΄ & Γ΄ Λυκείου) όπως αυτό το βλέπει ο εισηγητής μέσα από μια δραστηριότητα με τρία βήματα.

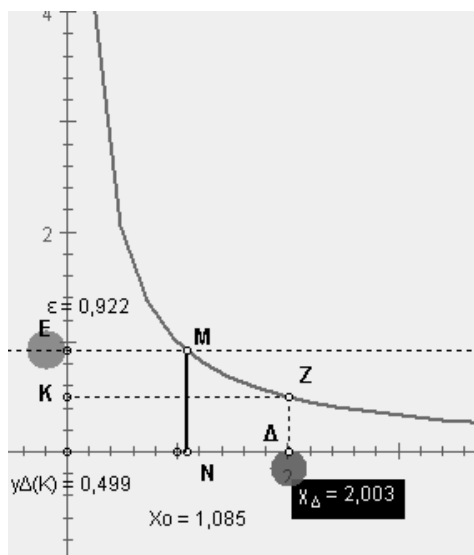
Βήμα 1^ο : Το ΟΡΙΟ με την βοήθεια του Geometry Sketchpad

Εδώ υπάρχει ενορατική προσέγγιση της έννοιας του ορίου στο $+\infty$, μέσω μιας γνωστής συνάρτησης, της $y=1/x$ (αρχείο Sketchpad: B1-ORIA1)



Μετακινώντας το σημείο Δ (ή την πράσινη σφαίρα) συνεχώς δεξιότερα ο μαθητής μπορεί να παρατηρεί και να καταγράφει σε ένα πίνακα τις τιμές τετμημένη και τεταγμένη του σημείου Δ από τις μετρήσεις που είναι στην επιφάνεια εργασίας.

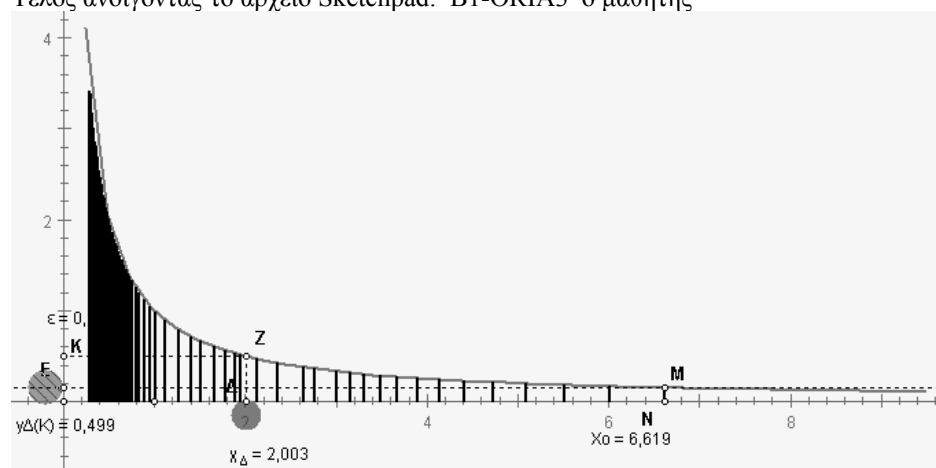
x_{Δ}	2	3	4	5	6
y_K					

B1-
μοβN
Τις
να

Ανοίγοντας το αρχείο Sketchpad: ORIA2 ο μαθητής μπορεί να μετακινήσει το σημείο E (ή την σφαίρα). Σε κάθε μετακίνηση στο θετικό ημιάξονα yy' με κατεύθυνση προς την αρχή των αξόνων ($\varepsilon \rightarrow 0$) το σημείο N μετακινείται σε τιμές μεγαλύτερες στον θετικό ημιάξονα xx'. Και για κάθε τιμή της τετμημένης X_0 του υπάρχουν $x > X_0$ ώστε $y < \varepsilon$ παραπάνω παρατηρήσεις μπορεί κάνει ο μαθητής μέσα από έναν πίνακα.

$y\Delta(K) < 0,4 = \varepsilon$	για $x = X_0 =$	
$y\Delta(K) < 0,3 = \varepsilon$	για $x = X_0 =$	
$y\Delta(K) < 0,1 = \varepsilon$	για $x = X_0 =$	
$y\Delta(K) < 0,08 = \varepsilon$	για $x = X_0 =$	
$y\Delta(K) < 0,05 = \varepsilon$	για $x = X_0 =$	

Τέλος ανοίγοντας το αρχείο Sketchpad: B1-ORIA3 ο μαθητής



μπορεί μετακινώντας το σημείο E (ή την μπλε σφαίρα) να δει ενορατικά διαδοχικές θέσεις του σημείου E ($\varepsilon \rightarrow 0$) και του N ($X_0 \rightarrow \infty$)

Βήμα 2^ο : Το ΟΡΙΟ με την βοήθεια του Excel

Εδώ υπάρχει αριθμητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου στο $+\infty$, μέσω της συνάρτησης, της $y=1/x$ του πρώτου βήματος (αρχείο Excel: B2-ORIA)

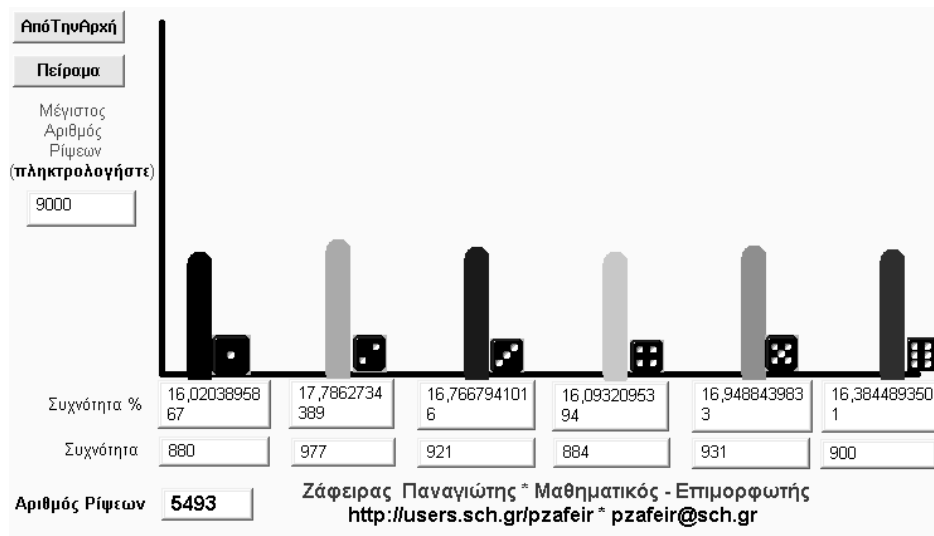
Δώστε την τιμή του ϵ > > > ώστε η $y=1/x < \epsilon$		0,1	
x	1/x		
9	0,111 111 111 111 111		
10	0,100 000 000 000 000		
11	0,090 909 090 909 091		
12	0,083 333 333 333 333		
13	0,076 923 076 923 077		
14	0,071 428 571 428 571		
15	0,066 666 666 666 667		
16	0,062 500 000 000 000		
17	0,058 823 529 411 765		
18	0,055 555 555 555 556		
19	0,052 631 578 947 368		
.....			
100	0,010 000 000 000 000	< 0,100 000 000 000	= ϵ
.....			
1.000	0,001 000 000 000 000		
.....			
10.000	0,000 100 000 000 000		
.....			
100.000	0,000 010 000 000 000		
.....			
1.000.000	0,000 001 000 000 000		
.....			
10.000.000	0,000 000 100 000 000		

Εδώ μπορούμε να δώσουμε μια τιμή του ϵ και να δούμε την τιμή X_0 και τις τιμές του y για ένα πλήθος τιμών του $x > X_0$

Βήμα 3^ο : Το ΟΡΙΟ με την βοήθεια MicroWorld Pro

Εδώ υπάρχει πειραματική προσέγγιση της έννοιας του ορίου στο $+\infty$ με μια προσομοίωση ενός πειράματος τύχης για ένα πολύ μεγάλο αριθμό δοκιμών . Ένα ζάρι ρίχνεται όσες φορές ζητήσουμε από το πρόγραμμα και μπορούμε να έχουμε τη συχνότητα (απόλυτη και σχετική) εμφάνισης ενός από τα ενδεχόμενα καθώς και το σχετικό ραβδόγραμμα .

Το πείραμα μπορεί να σταματήσει οποιαδήποτε στιγμή καταγράφοντας τον αριθμό των μέχρι τώρα δοκιμών και να συνεχιστεί αργότερα.



Οι συχνότητες και ο αριθμός επαναλήψεων μπορεί να καταγράφονται σε ένα πίνακα και να συγκρίνονται με τις θεωρητικά αναμενόμενες (1 προς 6 ή 16,666...% για κάθε ενδεχόμενο).

	100	1000	5000	10000	15000		
1	12	16	16,02	16,29	16,68	---->	16,666
2	19	15,7	18,04	17,2	16,79	---->	16,666
3	20	16,1	16,56	16,85	16,67	---->	16,666
4	16	16,3	16,02	15,97	16,05	---->	16,666
5	19	17,7	17,02	17,04	16,83	---->	16,666
6	14	18,2	16,16	16,56	16,97	---->	16,666

Επιλέγοντας μια επιθυμητή απόκλιση (ϵ) από το αναμενόμενο μπορούμε πειραματικά να βρούμε ένα αριθμό επαναλήψεων (X_0) του πειράματος πέραν του οποίου οι συχνότητες πλησιάζουν τις αναμενόμενες με απόκλιση μικρότερη του ϵ . Στον παραπάνω πίνακα είναι καταγεγραμμένα τα στοιχεία από μια εκτέλεση του πειράματος με σημεία διακοπής εκτέλεσης 100, 1.000, 5.000, 10.000, 15.000 δοκιμές που είναι και το άνω όριο δοκιμών που έχει δοθεί κατά την δημιουργία της εφαρμογής.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΤΗ)

Βήμα 1^ο : Το ΟΡΙΟ με την βοήθεια του Geometry Sketchpad

Ανοίξτε το αρχείο B1-ORIA1 του Sketchpad

ΕΡΩΤΗΣΗ 1^η

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα μετακινώντας το σημείο Δ ή την πράσινη σφαίρα.

$\chi\Delta$	2,003	3	4	5	6
yK	0,499				

ΕΡΩΤΗΣΗ 2^η

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα μετακινώντας το σημείο Δ ή την πράσινη σφαίρα. Αν χρειαστεί μετακινήστε την μπάρα στο κάτω μέρος της οθόνης σας για να μετακινηθείτε δεξιότερα.

$y\Delta(K) < 0,4 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	
$y\Delta(K) < 0,3 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	
$y\Delta(K) < 0,1 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	
$y\Delta(K) < 0,08 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	
$y\Delta(K) < 0,05 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 3^η

Τι παρατηρείται από την συμπλήρωση του παραπάνω πίνακα ;

ΕΡΩΤΗΣΗ 4^η

Ανοίξτε το αρχείο B1-ORIA2 του Sketchpad

Μετακινήστε το σημείο Ε ή την μοβ σφαίρα για να δώσετε στο ε τις τιμές του πίνακα της ερώτησης 3 και προσπαθήστε να συμπληρώσετε πάλι τον πίνακα μετακινώντας το σημείο Δ ή την πράσινη σφαίρα

$y\Delta(K) < 0,4 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	
$y\Delta(K) < 0,3 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	
$y\Delta(K) < 0,1 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	
$y\Delta(K) < 0,08 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	
$y\Delta(K) < 0,05 = \varepsilon$	για $\chi=X_0=$	

ΕΡΩΤΗΣΗ 5^η

Ανοίξτε το αρχείο B1-ORIA3 του Sketchpad

Μετακινήστε το σημείο Ε ή την μοβ σφαίρα

Δείτε πάλι την απάντησή σας στην ερώτηση 3

Βήμα 2^ο : Το ΟΡΙΟ με την βοήθεια του Excel

Ανοίξτε το αρχείο του Excel B2-ORIA

Εδώ έχουμε την συνάρτηση $1/\chi$ Πάνω δεξιά στο βαθύ κίτρινο τετράγωνο μπορούμε να δώσουμε τιμές στο ε. Το αρχείο μας εμφανίζει την τιμή X_0 και κάποιες τιμές του $\chi > X_0$ ώστε $y = 1/\chi < \varepsilon$

ΕΡΩΤΗΣΗ 6^η

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα δίνοντας τιμές στο ε

Για $\varepsilon =$	Έχουμε X_0 ώστε $y = 1/\chi < \varepsilon$
0,1	
0,01	
0,001	
0,000001	

0,0000000001

ΕΡΩΤΗΣΗ 7^η

Τι παρατηρείται από την συμπλήρωση του παραπάνω πίνακα ;

Βήμα 3^ο : Το ΟΠΙΟ με την βοήθεια MicroWorld Pro

Ανοίξτε το αρχείο του MicroWorld Pro B3-ORIA-0 ή το html αρχείο με το ίδιο όνομα. Στο αρχείο αυτό έχουμε μια εξομοίωση ενός πειράματος τύχης. Ρίχνουμε ένα ζάρι όσες φορές πληκτρολογήσουμε στο τετράγωνο (αριστερά και στο μέσον) με μέγιστο αριθμό ρίψεων 15.000. Στην επιφάνεια εργασίας εμφανίζεται η συχνότητα και η σχετική συχνότητα κάθε ενδεχομένου και ένα ραβδόγραμμα. Το πείραμα μπορεί να διακοπεί κάνοντας κλικ στο κουμπί Πείραμα (πάνω αριστερά) και στο κάτω αριστερό παράθυρο εμφανίζεται ο μέχρι την διακοπή, αριθμός ρίψεων του ζαριού.

ΕΡΩΤΗΣΗ 8^η

Ποιο είναι το θεωρητικά αναμενόμενο ποσοστό για κάθε ένα από τα ενδεχόμενα;

ΕΡΩΤΗΣΗ 9^η

Εκτελέστε το πείραμα και συμπληρώστε τον πίνακα:

Ρήψεις >>>> Ενδεχόμενα	100	1.000	5.000	10.000	15.000		Θεωρητικά Αναμενόμενα
1							
2							
3							
4							
5							
6							

ΕΡΩΤΗΣΗ 10^η

Τι συμπεράσματα βγάζεται από τη συμπλήρωση του παραπάνω πίνακα:
