

## «Ο ΑΡΒΗΛΟΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ»:. ΈΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Ιωάννου Στυλιανός**  
*Δρ., Επιμορφωτής ΤΠΕ &  
Εκπαιδευτικού Λογισμικού*  
[sioannou@sch.gr](mailto:sioannou@sch.gr)

**Κοκκίνη Κωνσταντίνα**  
*Καθηγήτρια Μαθηματικός*  
[Apostolu@panafonet.gr](mailto:Apostolu@panafonet.gr)

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην δραστηριότητα αυτή οι μαθητές καλούνται να λύσουν ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Θα εργαστούν πάνω σε έτοιμο σχήμα το οποίο έχει κατασκευαστεί από τον διδάσκοντα με το εκπαιδευτικό λογισμικό *The Geometer's Sketchpad*. Με το φύλλο εργασίας που θα τους δοθεί θα ασχοληθούν με εργασίες όπως:

- Να μετρήσουν διαμέτρους και εμβαδά που προκύπτουν από το σχήμα για να προσεγγίσουν το πρόβλημα.
- Να επαληθεύσουν τύπους εμβαδών που θα έχουν βρει με μια μικρή καθοδήγηση στο χαρτί.
- Να χειριστούν δυναμικά το σχήμα και να δούνε τα αποτελέσματα στις τιμές των εμβαδών.
- Να κάνουν κάποια γεωμετρική κατασκευή που ζητάει το πρόβλημα.
- Να χρησιμοποιήσουν την αφαιρετική μέθοδο με διαδοχικές αποκρύψεις, ώστε να ανακαλέσουν στη μνήμη τους μετρικές σχέσεις ορθογωνίου τριγώνου και να φτάσουν έτσι στη θεωρητική απόδειξη.

Ο διδάσκοντας μπορεί να παρουσιάζει ταυτόχρονα όλη την διαδικασία σε οθόνη προβολής με την βοήθεια βιντεοπροβολέα.

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** Γεωμετρία Λυκείου, Κατασκευή, Μέτρηση, Επαλήθευση, Δυναμική διαχείριση

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Άρβηλος του Αρχιμήδη είναι ένα σχήμα του επιπέδου το οποίο ορίζεται αν από ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  αφαιρέσουμε δύο ημικύκλια διαμέτρου  $A\Delta$  και  $\Delta B$  αντίστοιχα, όπου  $\Delta$  εσωτερικό σημείο του  $AB$ . Οι μαθητές θα πρέπει να υπολογίσουν το εμβαδόν του και στη συνέχεια να λύσουν το εξής πρόβλημα: Αν φέρουμε την κάθετη στο σημείο  $\Delta$  της  $AB$  η οποία είναι και κοινή εσωτερική εφαπτομένη των ημικύκλων διαμέτρων  $A\Delta$  και  $\Delta B$  και βρούμε το σημείο τομής της  $\Gamma$  με το ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$ , τότε το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου  $\Gamma\Delta$  είναι ίσο με το εμβαδόν του αρβήλου. Η δραστηριότητα απευθύνεται σε μαθητές Β' Λυκείου. Ο τρόπος που θα δοθεί μπορεί να βοηθήσει την πλειοψηφία των μαθητών να συμμετάσχει στην διαδικασία επίλυσης ενός φαινομενικά δύσκολου προβλήματος και να φτάσει σε μια πρώτη προσέγγισή του. Αυτό θα θεωρηθεί επιτυχία εκ μέρους του διδάσκοντα ακόμη και αν οι περισσότεροι δεν ολοκληρώσουν την δραστηριότητα. Η δυνατότητα γρήγορης επαλήθευσης ή μη των τύπων που αυτοί θα διαλέξουν θα κατευθύνει

αρκετούς στην εύρεση των σωστών τύπων. Ο δυναμικός χειρισμός του γενικευμένου σχήματος θα οδηγήσει στην απόρριψη κάποιας λύσης και θα αναδείξει την αναγκαιότητα της απόδειξης. Η δραστηριότητα συνοδεύεται από φύλλο εργασίας

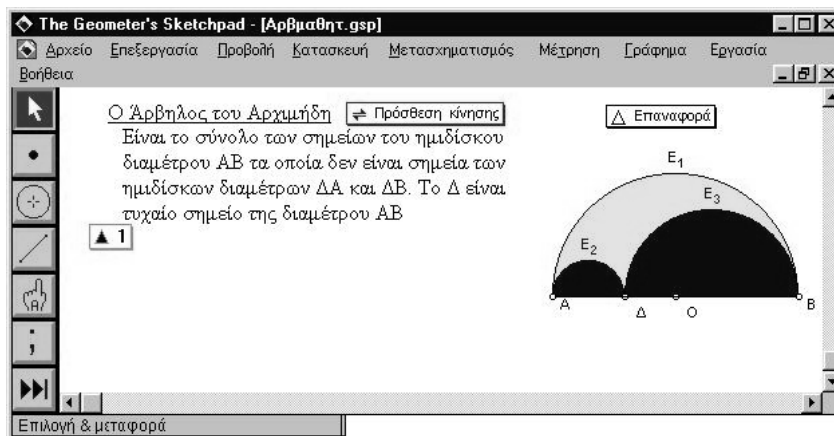
### ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

- Οι προαπαιτούμενες τεχνικές γνώσεις για τη χρησιμοποίηση του τεχνολογικού μέσου με τη βοήθεια του οποίου θα υλοποιηθεί το σενάριο εντοπίζονται στη εξοικείωση με τα βασικά εργαλεία του περιβάλλοντος του λογισμικού Sketchpad και τις εντολές
- Το προτεινόμενο σενάριο προτείνεται να ενταχθεί στο σχολείο σύμφωνα με το αναλυτικό και ωρολόγιο πρόγραμμα.
- Για την εφαρμογή της δραστηριότητας απαιτείται ένα φύλλο εργασίας για τους μαθητές, η καλή λειτουργία του εργαστηρίου υπολογιστών με το λογισμικό εγκατεστημένο και η συγκρότηση ομάδων εργασίας.

Οι μαθητές εργάζονται σε μικρές ομάδες και προσπαθούν να υλοποιήσουν το φύλλο εργασίας. Ο διδάσκοντας μαζί με το βοηθό του παρακολουθεί, συντονίζει και παροτρύνει αυτούς που δυσκολεύονται.

### ΑΝΟΙΓΜΑ ΤΟΥ ΒΑΣΙΚΟΥ ΑΡΧΕΙΟΥ.

Οι μαθητές ανοίγουν ένα έτοιμο αρχείο που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια εργασίας του υπολογιστή. Στην οθόνη θα δουν την γεωμετρική αναπαράσταση του άρβηλου όπως επίσης και αριθμημένα κουμπιά στα οποία εμφανίζονται καθοδήγηση στην οθόνη. (κουμπί 1)



### ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΙΑΜΕΤΡΩΝ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΩΝ. (ΚΟΥΜΠΙ2)

- Μετρήστε τις διαμέτρους AB, AΔ, ΔB με την εντολή **Μενού** → **Μέτρηση** → **Μήκος**. (Θυμηθείτε, πρώτα επιλέγουμε το τμήμα που θέλουμε να μετρήσουμε και μετά δίνουμε την εντολή).
- Μετρήστε τα εμβαδά E1, E2, E3 με την εντολή **Μενού** → **Μέτρηση** → **Εμβαδόν**

- Υπολογίστε το  $E_2+E_3$ . Δώστε πρώτα την εντολή **Μενού** → **Μέτρηση** → **Υπολογισμός** για να εμφανίσετε τον υπολογιστή του Sketchpad. Κάντε κλικ στη μέτρηση  $E_2$  του χώρου εργασίας σας μετά κλικ στο + του υπολογιστή, μετά κλικ στη μέτρηση  $E_3$  του χώρου εργασίας μετά κλικ στο OK του υπολογιστή.
- Βρείτε τώρα το Εαρθήλου κάνοντας τον κατάλληλο υπολογισμό με τον υπολογιστή του Sketchpad

### ΕΥΡΕΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΣΤΟ ΧΑΡΤΙ.

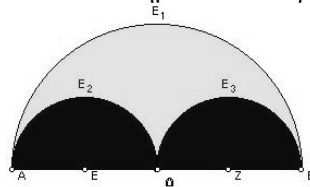
Ποιος ο θεωρητικός τύπος που δίνει το  $E_{\text{αρθήλου}}$ ; Κάντε πράξεις στο χαρτί και διαλέξτε ποια είναι η σωστή απάντηση από τις τρεις που δίνονται παρακάτω. Επαληθεύστε την απάντησή σας με τον υπολογιστή του Sketchpad. Κουμπίζ

$$(A) E_{\text{αρθήλου}} = \frac{\pi}{4} \cdot \Delta\Delta \cdot \Delta B \quad (B) E_{\text{αρθήλου}} = \frac{\pi}{2} \cdot \Delta\Delta \cdot \Delta B \quad (Γ) E_{\text{αρθήλου}} = 2\pi \cdot \Delta\Delta \cdot \Delta B$$

### ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ.

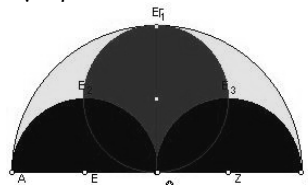
Σύρατε το σημείο  $\Delta$  και παρατηρείστε πως μεταβάλλονται τα εμβαδά. Απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

- Σε ποια θέση το εμβαδόν του αρθήλου μηδενίζεται;
- Μεταφέρετε το σημείο  $\Delta$  πάνω στο σημείο  $O$ . Τι παρατηρείτε για το Εαρθήλου;



### ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

Συμπληρώστε το σχήμα. Κατασκευάστε έναν κύκλο με διάμετρο  $\Gamma\Delta$  εφαπτόμενη στα δύο ημικύκλια διαμέτρων  $\Delta\Delta$  και  $\Delta B$  αντίστοιχα.



- Αφού επιλέξετε το  $AB$  και το  $\Delta$  κατασκευάστε κάθετη ευθεία στην  $AB$  στο σημείο  $\Delta$  με την εντολή **Μενού**→**Κατασκευή**→**Κάθετη ευθεία**.
- Αφού επιλέξετε την κάθετη που μόλις φτιάξατε και το ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$ , βρείτε το σημείο τομής τους  $\Gamma$  με την εντολή **Μενού**→**Κατασκευή**→**Σημείο σε τομή**.
- Επιλέξτε την κάθετη ευθεία και δώστε **Μενού**→**Προβολή**→**Απόκρυψη ευθείας**.
- Επιλέξτε τα σημεία  $\Gamma, \Delta$  και δώστε την εντολή **Μενού**→**Κατασκευή**→**Τμήμα**
- Βρείτε το μέσο του  $\Gamma\Delta$  με την εντολή **Μενού**→**Κατασκευή**→**Σημείο σε μέσο**

- Αφού επιλέξετε το μέσο του ΓΔ και το Γ κατασκευάστε κύκλο με την εντολή Μενού→Κατασκευή→Κύκλος
- Αφού επιλέξετε τον κύκλο δώστε την εντολή Μενού→Κατασκευή→Εσωτερικό κύκλου και ονομάστε το Ε4

### ΕΙΚΑΣΙΕΣ

- Έχει κάποια σχέση το εμβαδόν του κύκλου με το Ε2+Ε3;
- Έχει κάποια σχέση το εμβαδόν του κύκλου με το Εαρθήλου;

### ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ.

- Μετρήστε την διάμετρο ΓΔ και το εμβαδόν Ε4 του κύκλου.

### ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ.

Αλλάξτε την διάμετρο ΑΒ μετακινώντας το σημείο Β. Ισχύουν οι προηγούμενες εικασίες που αναφέρονται στη σχέση του εμβαδού του κύκλου με το Ε2+Ε3;

Μετακινήστε πάλι το σημείο Δ σε διάφορες θέσεις. Ισχύουν οι προηγούμενες εικασίες που αναφέρονται στη σχέση του εμβαδού του κύκλου με το Εαρθήλου;

### ΕΥΡΕΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ.

Βρείτε το Εμβαδόν του κύκλου με διάμετρο ΓΔ στο χαρτί και επαληθεύστε με το Sketchpad.

$$\alpha) \text{ Εκύκλου} = \frac{\pi}{4} \Gamma\Delta^2 \quad \beta) \text{ Εκύκλου} = \frac{\pi}{2} \Gamma\Delta^2 \quad \gamma) \text{ Εκύκλου} = \pi \cdot \Gamma\Delta^2$$

### ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Από τις μετρήσεις που έχετε κάνει φαίνεται ότι Εαρθήλου=Ε2+Ε3. Ποια σχέση δηλαδή πρέπει να ισχύει μεταξύ των διαμέτρων ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ; Κάντε επαλήθευση με το Sketchpad (Προαιρετική).

### ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΑΠΟΚΡΥΨΕΙΣ

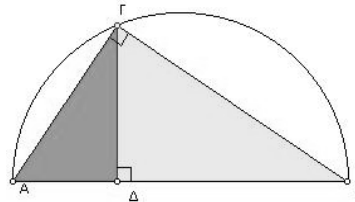
Επιλέξτε και αποκρύψτε διαδοχικά: τον κύκλο διαμέτρου ΓΔ και το εσωτερικό του, και τα ημικύκλια διαμέτρου ΑΔ, ΔΓ καθώς και τα εσωτερικά τους. Προσπαθήστε να εξηγήσετε γιατί ισχύει η προηγούμενη σχέση που συμπεράνατε. Στην ανάγκη κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΓΒ και απαντήστε στις παρακάτω ερωτήσεις:

Είναι το τρίγωνο ΑΓΒ ορθογώνιο;

Το ΓΔ είναι ύψος ορθογώνιου τριγώνου το αντίστοιχο προς την υποτείνουσα;

Τα ΑΔ, ΔΒ είναι οι προβολές των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα;

Ποια μετρική σχέση ισχύει γι' αυτό το τρίγωνο που να αποδεικνύει έτσι το συμπέρασμά μας;



### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Έγχρωμη-Μεθοδική Εγκυκλοπαίδεια Μαθηματικών, Τόμος Β΄σελίδα 157-158, εκδόσεις ΠΑΓΟΥΛΑΤΟΣ
- Σχολικό Βιβλίο «Ευκλείδεια Γεωμετρία» Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου, Αργυρόπουλος Η. Βλάμος Π., κ.α., ΟΕΔΒ, 2002