ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ-ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ. ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΜΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΚΑΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μπιζά Ειρήνη
Μαθηματικός
empiza@sch.gr

Τσίτσος Βασίλης
Μαθηματικός, επιμορφωτής ΤΠΕ
vtsitsos@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή περιγράφουμε το σχεδιασμό μιας δραστηριότητας που έχει ως θέμα ένα γεωμετρικό πρόβλημα μεγίστου-ελαχίστου. Στην παρουσίαση που ακολουθεί δίνουμε έμφαση στα σημεία δυσκολίας που προκύπτουν από την ανάγκη να εμπλέξουμε ενεργητικά τους μαθητές μας στην διαδικασία επίλυσης του προβλήματος.

Ο στόχος είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα μαθηματικά δεν λειτουργούν αποσπασματικά και κατακερματισμένα αλλά έχουν συνέχεια, δομή, συνάφεια και συνδέονται με τις άλλες επιστήμες. Για το λόγο αυτό δημιουργήσαμε κατάλληλα πλαίσια εργασίας επανατοποθετώντας το πρόβλημα σε περιβάλλοντα άλλοτε δυναμικής γεωμετρίας (Geometer's Sketchpad) και άλλοτε μοντελοποίησης (Interactive Physics).

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Ανοιχτό πρόβλημα, μοντελοποίηση, μικρόκοσμος, εικασία, δυναμική γεωμετρία, Geometer's Sketchpad Interactive Physics

ΣΧΕΔΙΑΖΟΝΤΑΣ ΜΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΌΤΗΤΑ

Τα μαθηματικά προβλήματα που διδάσκονται, σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα, είναι συνήθως χρονικά και θεματικά περιορισμένα. Αυτό σημαίνει ότι τις περισσότερες φορές είναι εφαρμογές συγκεκριμένης θεωρίας που διαδέχονται η μία την άλλη με μόνο κοινό σημείο την αναφορά στην ίδια διδακτική ενότητα . Σχεδόν πάντα, όμως, αγνοείται η γέννηση και η εξέλιξη ενός προβλήματος καθώς και η σύνδεσή του με την πραγματικότητα. Αυτό έχει ως συνέπεια η κάθε δραστηριότητα να είναι αποκομμένη από το επιστημονικό και ιστορικό πλαίσιο στο οποίο αναφέρεται, με αντίστοιχο αντίκτυπο στις διαδικασίες ανάπτυξης εικασιών και επίλυσης προβλημάτων.

Τα κρίσιμα σημεία του προβλήματος που κανονικά θα έπρεπε να επινοηθούν από τους μαθητές με κατάλληλη υποστήριξη, αποκαλύπτονται αυθαίρετα από τον εκπαιδευτικό που παίζει το ρόλο του «από μηχανής Θεού». Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές μιμούμενοι τις εξηγήσεις-διαπιστώσεις του εκπαιδευτικού να αρκούνται στη χρησιμοποίησή τους και σε άλλες περιπτώσεις.

Η εμπειρία έχει δείξει ότι τέτοιες προσεγγίσεις δημιουργούν την άποψη ότι τα μαθηματικά λειτουργούν έξω από τις άλλες επιστήμες και πέρα από την πραγματικότητα, γεγονός που επιφέρει αρνητικές επιπτώσεις στην επίδοση των μαθητών.

Στην απόπειρα να διερευνήσουμε τους τρόπους επίλυσης αυτών των προβλημάτων θεωρούμε σωστό στο σχεδιασμό μιας δραστηριότητας μαθηματικών να λαμβάνονται υπόψη τα παρακάτω:

- Το θέμα που θα επιλεχθεί να έχει τη δυνατότητα διεύρυνσης προς άλλες γνωστικές περιοχές, όχι αποκλειστικά των μαθηματικών και να συνδυάζει διαφορετικές ενότητες, τεχνικές και μεθόδους. Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα οι μαθητές να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά δεν λειτουργούν αποσπασματικά και κατακερματισμένα αλλά έχουν συνέχεια, δομή, συνάφεια και συνδέονται με τις άλλες επιστήμες.
- Η δυνατότητα διεύρυνσης του χρόνο προσέγγισης, ώστε να υπάρχει περιθώριο να δοθεί έμφαση στην αναζήτηση, την έρευνα, την επινόηση και την εφευρετικότητα. Με τον τρόπο αυτό τα προβλήματα που διαχειριζόμαστε δεν θα είναι ξεκομμένα αλλά θα υπάρχουν μέσα σε μια γενικότερη συλλογιστική.
- Ο τρόπος υποστήριξης των μαθητών ώστε να φθάσουν στην επινόηση των κρίσιμων σημείων του προβλήματος χωρίς αυτά να υπαγορεύονται. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού είναι να παρέχει το απαιτούμενο κάθε φορά ποσό πληροφορίας που να στρέφει το ενδιαφέρον των μαθητών σε σημεία που ενδεχομένως δεν είχαν εντοπίσει. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με κατάλληλα ερωτήματα ή ακόμα και με νέα ενδιάμεσα προβλήματα. Το κάθε πρόβλημα πρέπει να είναι ενταγμένο σε μία ευρύτερη ενότητα προβληματισμού. Στόχος είναι οι μαθητές να αναπτύξουν τις κατάλληλες εικασίες που μπορούν και να τους οδηγήσουν στη λύση.
- Η δημιουργία κατάλληλων πλαισίων μέσα στα οποία οι μαθητές να μπορούν να κατασκευάζουν εικονικά καθώς και πραγματικά μοντέλα για να διερευνήσουν και να κατανοήσουν το πρόβλημα. Με τον τρόπο αυτό δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να συνδέσουν το μαθηματικό γεγονός με φυσικά φαινόμενα και να αντιληφθούν την αφαιρετική δύναμη της μαθηματικής γλώσσας καθώς και να μάθουν να προσεγγίζουν ερμηνευτικά τις παρατηρήσεις τους .
- Το ζητούμενο στη δραστηριότητα πρέπει να είναι ο μαθητής να μάθει να χειρίζεται με ευελιξία το μαθηματικό συμβολισμό και τις μαθηματικές έννοιες για να μπορεί να αντιμετωπίζει καταστάσεις προβληματισμού. Η κύρια πηγή γνώσης δεν είναι η λύση του προβλήματος αυτή καθεαυτή, αλλά η πορεία προς αυτή. Η λύση του προβλήματος είναι επιθυμητή αλλά όχι απαραίτητη για να κερδίσει ο μαθητής τις απαιτούμενες γνώσεις.
- Ο δάσκαλος γίνεται ο ίδιος ερευνητής και ως προς το πρόβλημα και ως προς το μικροεπίπεδο της τάξης του, *αναστοχαστικός τύπος δασκάλου* (Ι Γ Μαρμαρινός, 2002).

Παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά ένα πρόβλημα που αποτελεί μέρος ενός ευρύτερου διδακτικού σχεδιασμού που λαμβάνει υπόψη τα παραπάνω. Ως ευρύτερη θεματική ενότητα επιλέχθηκαν τα γεωμετρικά προβλήματα μεγίστου – ελαχίστου. Όπως φαίνεται και στην αναλυτική περιγραφή που ακολουθεί, τα σημεία δυσκολίας που προέκυψαν αντιμετωπίστηκαν με επανατοποθέτηση του προβλήματος σε περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας (Geometer's Sketchpad) και μοντελοποίησης (Interactive physics) ώστε να δημιουργήσουμε κατάλληλα πλαίσια εργασίας .

Είναι αλήθεια ότι οι νέες τεχνολογίες και ειδικότερα τα εκπαιδευτικά λογισμικά δίνουν τη δυνατότητα κατασκευής κατάλληλων μικρόκοσμων και αλλαγής του πλαισίου προσέγγισης. Επίσης παρέχουν τα κατάλληλα εργαλεία στους μαθητές για πειραματισμό και ανάπτυξη εικασιών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

«Θεωρούμε όλα τα δυνατά τετράπλευρα με δεδομένες πλευρές α, β, γ και δ, διατεταγμένες με τη σειρά που αναφέρονται.. Ποιο από αυτά θα έχει το μέγιστο εμβαδόν;»

Το πρόβλημα αυτό εντάσσεται σε μία ευρύτερη ενότητα προβλημάτων μεγίστων – ελαχίστων που έχουν ως αφετηρία το ιστορικό πρόβλημα της Διδούς: Ο μύθος της Διδούς αναφέρεται στην Αινειάδα του Βιργιλίου και σχετίζεται με ένα περιστατικό που τοποθετείται από τη παράδοση στον 9ο π.Χ. αιώνα. Σύμφωνα με αυτόν η πριγκίπισσα της Φοινίκης Διδώ, όταν έφτασε κυνηγημένη στα παράλια της σημερινής Τύνιδας, θέλησε να αγοράσει γη από τον τοπικό ηγεμόνα Ιάρβα. Μετά από διαπραγματεύσεις και αφού κατάφερε να τον πείσει να της παραχωρήσει τόση γη όση θα μπορούσε να περικυκλώσει με τη δορά ενός ταύρου, τεμάχισε το δέρμα σε λεπτές λωρίδες, τις έδεσε μεταξύ τους και κύκλωσε ένα μεγάλο τμήμα γης. Το ερώτημα που προκύπτει από αυτό το περιστατικό είναι η εύρεση της μέγιστης επιφάνειας που μπορεί να οριστεί με τον τρόπο αυτό.

Α. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στη φάση αυτή γίνεται κατασκευή τετραπλεύρου με δεδομένες πλευρές α, β, γ και δ, διατεταγμένες με τη σειρά που αναφέρονται. Η κατασκευή αυτή μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: είτε σε περιβάλλον ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας είτε σε φυσικό περιβάλλον με αντικείμενα καθημερινής χρήσης όπως χαρτί, σχοινί, ξύλο, πανί κ.α. Η πρόταση υποστηρίζει να πραγματοποιηθούν και οι δύο προσεγγίσεις από διαφορετικές ομάδες μαθητών που θα εργάζονται παράλληλα και θα συνεργάζονται μεταξύ τους με σκοπό την αμοιβαία υποστήριξη και τη σύγκλιση σε κοινά συμπεράσματα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

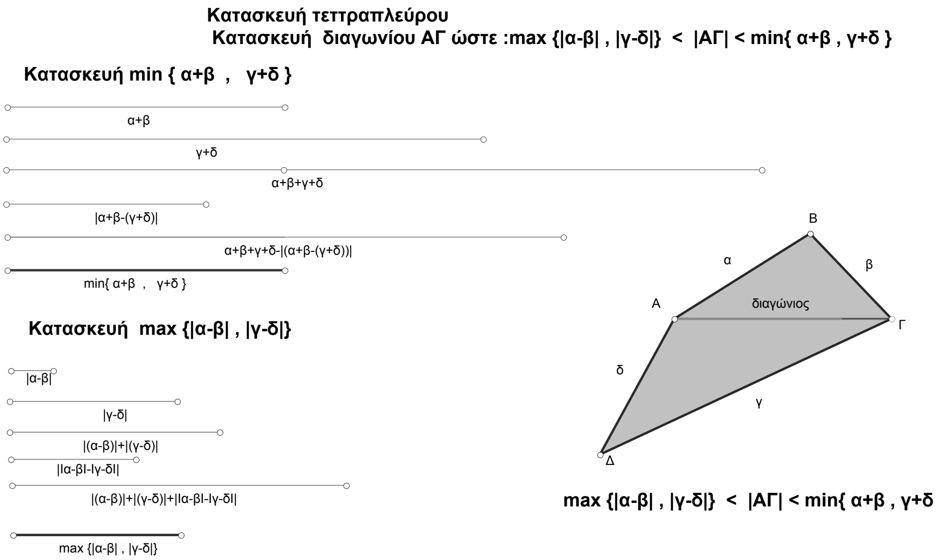
Α1. ΑΠΟΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Προτρέπουμε τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ με δεδομένες πλευρές α, β, γ και δ, διατεταγμένες με τη σειρά που αναφέρονται. Κρίνεται σκόπιμο να σκεφτούν πρώτα την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη και μετά να την πραγματοποιήσουν με τη βοήθεια ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

Αρχικά το τετράπλευρο μπορεί να κατασκευαστεί με τυχαία επιλογή κάποιων συγκεκριμένων κορυφών. Ένας τέτοιος τρόπος είναι με την κατασκευή δύο κορυφών Α και Γ ως ελεύθερα σημεία και την εύρεση των Β και Δ ως σημεία τομής κύκλων που έχουν ακτίνες τα δεδομένα τμήματα.

Ενθαρρύνουμε τους μαθητές να χειριστούν δυναμικά, αρχικά τα σημεία Α και Γ και έπειτα τα τμήματα α, β, γ και δ με σκοπό να παρατηρήσουν ότι το τετράπλευρο με τις παραπάνω προδιαγραφές δεν υπάρχει πάντα. Αυτό γίνεται αντικείμενο συζήτησης ώστε να προκύψουν οι κατάλληλες ανισοτικές σχέσεις που πρέπει να ικανοποιεί το τμήμα ΑΓ σε σχέση με τις δεδομένες πλευρές για να είναι δυνατή η κατασκευή του τετραπλεύρου. Η παραπάνω διερεύνηση οδηγεί στον περιορισμό της διαγωνίου ΑΓ: $\max\left(|\alpha\text{-}\beta|,|\gamma\text{-}\delta|\right) < \text{ΑΓ} < \min\left(\alpha+\beta,\gamma+\delta\right)$ και το σχήμα βελτιώνεται έτσι ώστε το Γ να κινείται σε τμήμα που τα σημεία του ικανοποιούν την παραπάνω σχέση.

Για τη διερεύνηση της παραπάνω σχέσης είναι απαραίτητος ο συνδυασμός γνώσεων Άλγεβρας και Γεωμετρίας καθότι η υλοποίησή της απαιτεί την γεωμετρική απεικόνιση αλγεβρικών σχέσεων. Η κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος με τις παραπάνω προδιαγραφές δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί με το συμβατικό τρόπο (μολύβι, χαρτί) ενώ πραγματοποιείται με επιτυχία στο περιβάλλον ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (εικόνα 1).

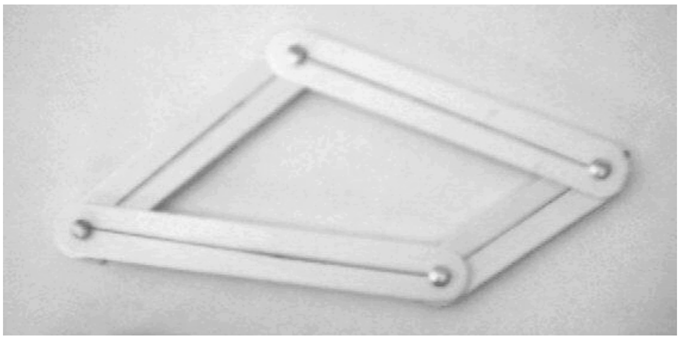


Εικόνα 1: *Κατασκευή τετραπλεύρου*

Στη συνέχεια οι μαθητές μετρούν το εμβαδόν του τετραπλεύρου και χειρίζονται δυναμικά το σχήμα προσπαθώντας να εντοπίσουν εκείνο που θα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

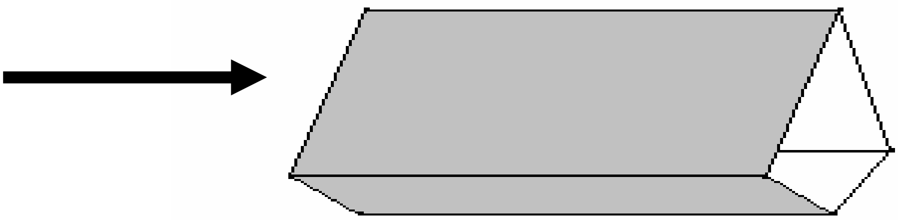
Α2. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΕ ΦΥΣΙΚΑ ΜΕΣΑ.

Δημιουργία κατασκευής με φυσικά υλικά (χαρτί, σχοινί, ξύλο, πανί κ.α)(εικόνα 2). Η κατασκευή αυτή θα λειτουργήσει ως μοντέλο του προβλήματος ενώ η επιλογή της γίνεται με κριτήριο: να επιδέχεται φυσική ερμηνεία και να διευκολύνει τη δημιουργία εικασιών σχετικά με τη λύση.



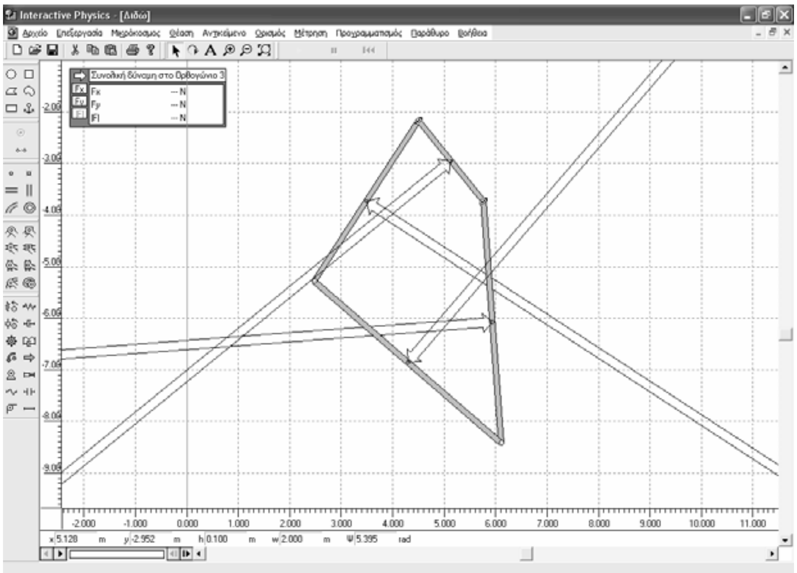
Εικόνα 2: *πραγματικό μοντέλο, αρθρωτό σχήμα*

Μια άλλη ιδέα είναι να κατασκευαστεί ένας πρισματικός σωλήνας ή αεραγωγός (εικόνα 3) που η κάθετη διατομή του είναι το πολυγωνικό σχήμα που μελετάμε. Όταν διοχετευθεί νερό ή αέρας μέσα από το σωλήνα η πίεση που θα ασκηθεί στα τοιχώματα θα τον αναγκάσει να διογκωθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε η διατομή να αποκτήσει το μέγιστο εμβαδόν. Το πολύγωνο που σχηματίζεται στην περίπτωση αυτή είναι το ζητούμενο. .



Εικόνα 3: *πρισματικός σωλήνας*

Η διερεύνηση της παραπάνω κατασκευής διευκολύνεται από ένα λογισμικό μοντελοποίησης, όπως το Interactive Physics. Στην κατασκευή αυτή στο σώμα – τετράπλευρο ασκούνται δυνάμεις κάθετες στα μέσα των πλευρών και με μέτρο ανάλογο του μήκους της αντίστοιχης πλευράς (εικόνα 4).



Εικόνα 4: *Εικονικό μοντέλο, στο περιβάλλον του λογισμικού Interactive Physics. Το μοντέλο αυτό κατασκευάστηκε από τον εκπ/κο Αντώνη Αντωνίου.*

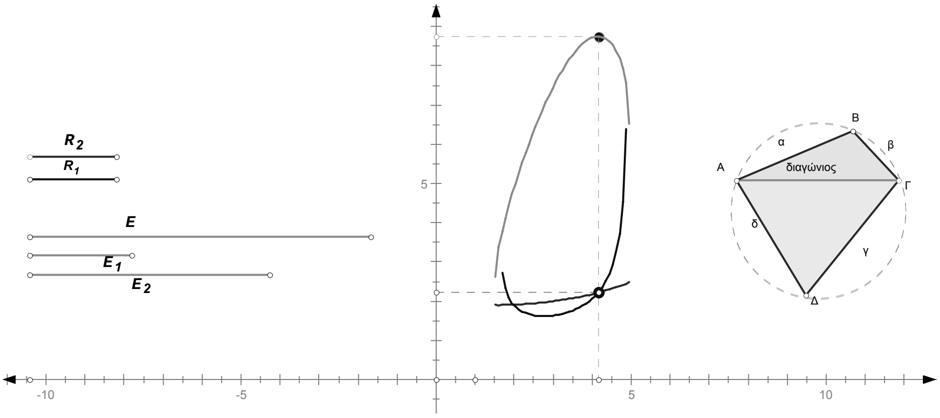
Β. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΙΚΑΣΙΩΝ

Το ζητούμενο στο στάδιο αυτό είναι οι μαθητές να καταφέρουν να εντοπίσουν τις ιδιότητες του τετραπλεύρου που παρουσιάζει το μέγιστο εμβαδόν. Αυτό είναι το πιο δύσκολο σημείο της δραστηριότητας και ο λόγος είναι ότι ο απλός πειραματισμός, χωρίς πλαίσιο δράσης, λειτουργεί τυχαία, επομένως μειώνει τις πιθανότητες να οδηγηθούν οι μαθητές στις σωστές υποθέσεις, ιδιαίτερα αν το πρόβλημα που αντιμετωπίζουν είναι αυξημένης δυσκολίας και πολυπλοκότητας. Από την άλλη μεριά, οι μαθητές πρέπει να οδηγηθούν σε εικασίες, χωρίς να πάρουν την απάντηση έτοιμη από τον εκπαιδευτικό. Για το λόγο αυτό υποστηρίζουμε τις ομάδες των μαθητών να ασχοληθούν παράλληλα και συμπληρωματικά τόσο στο περιβάλλον της δυναμικής γεωμετρίας αλλά και στο φυσικό περιβάλλον με τα μοντέλα που έχουν κατασκευαστεί.

Β1. ΣΕ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

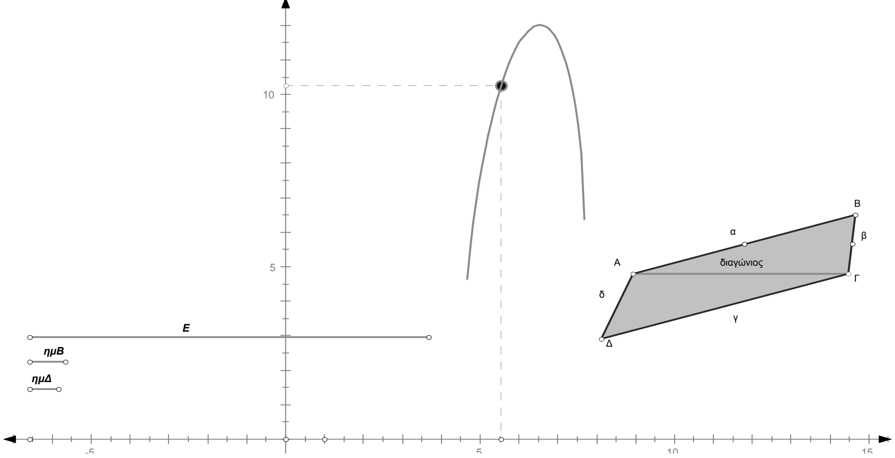
Ο υπολογισμός του εμβαδού του τετραπλεύρου ανάγεται στο υπολογισμό των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΓΔ. Επειδή σε καθένα από αυτά τα τρίγωνα είναι δεδομένες δύο πλευρές, δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα να χρησιμοποιήσουν έναν από τους γνωστούς τύπους: $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}\cdot\text{ημΑ}$ ή $(\text{ΑΒΓ}) = \frac{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΓ}}{4\text{R}}$. Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές, οι μαθητές εντοπίζουν τα μεγέθη που μεταβάλλονται και τα παρατηρούν σε σχέση με το εμβαδόν του τετραπλεύρου. Για παράδειγμα:

- αν χρησιμοποιηθεί ο τύπος του περιγεγραμμένου κύκλου, το ζητούμενο τετράπλευρο είναι εκείνο που προκύπτει όταν μεγιστοποιείται η παράσταση: $\mathrm{E} = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \mathrm{A\Gamma}}{4\mathrm{R}_1} + \frac{\gamma \cdot \delta \cdot \mathrm{A\Gamma}}{4\mathrm{R}_2}$. Το λογισμικό παρέχει την δυνατότητα να αποδοθούν τα μεγέθη των R_1, R_2 και E με κατάλληλους μονοδιάστατους και δισδιάστατους μεταβολείς, ώστε να είναι εφικτή η παρατήρηση της συμμεταβολής τους. Πράγματι, όπως φαίνεται και στην εικόνα 5 το εμβαδόν του τετραπλεύρου μεγιστοποιείται όταν R_1=R_2, δηλαδή όταν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι ταυτίζονται και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.



Εικόνα 5: *Μικρόκοσμος διερεύνησης*

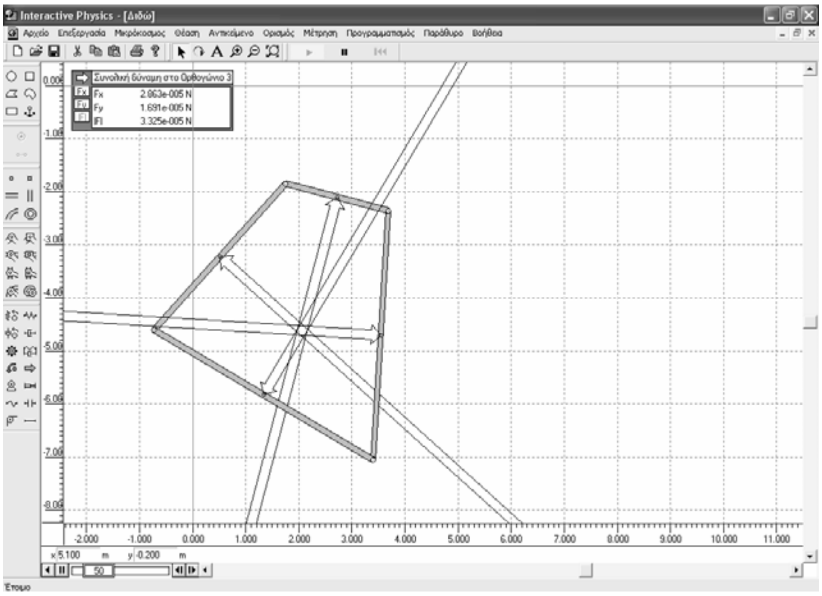
- αν χρησιμοποιηθεί ο τύπος του ημιτόνου, το ζητούμενο τετράπλευρο είναι εκείνο που προκύπτει όταν ημΒ=ημΔ και οι γωνίες Β και Δ είναι παραπληρωματικές. Στην περίπτωση αυτή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο (εικόνα 6).



Εικόνα 6: *Μικρόκοσμος διερεύνησης*

Β2. ΣΕ ΦΥΣΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ

Στο μοντέλο της εικόνας 3 που έχουμε ήδη περιγράψει, τα τοιχώματα του σωλήνα ισορροπούν όταν η διατομή έχει το μέγιστο εμβαδόν. Στην περίπτωση αυτή οι δυνάμεις που ασκούνται από το νερό ή τον αέρα είναι τέτοιες ώστε η συνισταμένη δύναμη και η συνισταμένη ροπή να είναι μηδενική. Για να συμβεί αυτό πρέπει οι μεσοκάθετες των πλευρών, ως φορείς των συνισταμένων δυνάμεων κάθε πλευράς να διέρχονται από το ίδιο σημείο. Επομένως το μέγιστο εμβαδόν παρουσιάζεται όταν το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο. Η παραπάνω εικασία ενισχύεται και με τον εικονικό τρόπο εκτέλεσης του πειράματος με το μοντέλο του Interactive Physics. Όταν ο μαθητής εκτελεί το μοντέλο αυτό παρατηρεί ότι το τετράπλευρο ισορροπεί σε εκείνη τη θέση που οι φορείς των δυνάμεων διέρχονται από το ίδιο σημείο (συνισταμένη δύναμη και συνισταμένη ροπή μηδέν) και το εμβαδόν του είναι μέγιστο (Εικόνα 7).



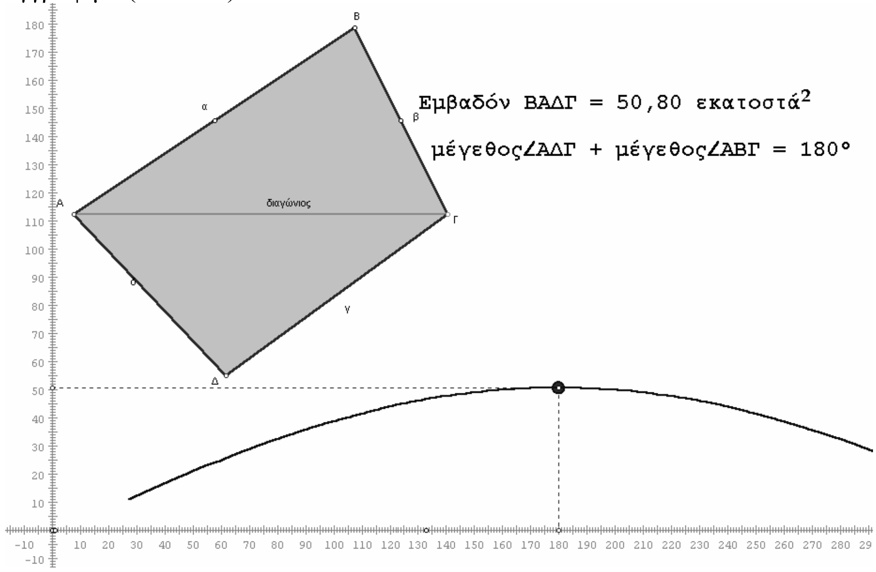
Εικόνα 7: *Εικονικό μοντέλο, στο περιβάλλον του λογισμικού Interactive Physics. Το μοντέλο αυτό κατασκευάστηκε από τον εκπ/κο Αντώνη Αντωνίου.*

Όπως βλέπουμε, οι μαθητές, με τις παραπάνω διαδικασίες οδηγούνται στην ίδια εικασία από δύο διαφορετικές πορείες. Το αποτέλεσμα τους έρχεται να ενισχυθεί από το γεγονός ότι το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε δεν υπάρχει αυτόνομα, αλλά αποτελεί μέρος ενότητας προβλημάτων μεγίστου – ελαχίστου που έχει ξεκινήσει από το πρόβλημα της Διδούς. Ήδη οι μαθητές γνωρίζουν ότι η βελτιστοποίηση στη φύση συνδέεται με τη συμμετρία με την έννοια ότι από όλα τα ισοπεριμετρικά σχήματα εκείνα που παρουσιάζουν μέγιστο εμβαδόν είναι όσα έχουν «κανονικότητες» και συμμετρίες. Για παράδειγμα από όλα τα ν-γωνα με σταθερή περίμετρο το κανονικό έχει το μέγιστο εμβαδόν ή από όλες τις δεδομένου μήκους κλειστές καμπύλες του επιπέδου ο κύκλος περικλείει το μέγιστο εμβαδόν. Σε αυτό το συλλογιστικό πλαίσιο θα αναζητηθεί ποιο από τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ παρουσιάζει κάποια «κανονικότητα». Επειδή οι πλευρές α, β, γ και δ είναι τυχαία επιλεγμένες και σταθερές, το μόνο τετράπλευρο που πλησιάζει τις «προδιαγραφές βελτιστοποίησης» είναι το εγγράψιμο. Ο ρόλος του εκπαιδευτικού στη φάση αυτή είναι να θέσει στους μαθητές κατάλληλα ερωτήματα ώστε να ενεργοποιηθούν και να συνδυάσουν όλες τις παραπάνω γνώσεις.

Γ. ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΚΗ ΑΜΦΙΒΟΛΙΑ

Στο σημείο αυτό έχει δημιουργηθεί από τους μαθητές η υποψία ότι το ζητούμενο τετράπλευρο είναι το εγγράψιμο. Δεν έχει όμως απαντηθεί το ερώτημα της ύπαρξης τέτοιου τετραπλεύρου. Το πιθανότερο είναι οι μαθητές να μην εκφράσουν αυτό τον προβληματισμό αυθόρμητα, αλλά ο εκπαιδευτικός οφείλει να θέσει αυτή την ερώτηση και να τους κινητοποιήσει. Με ερωτήματα τέτοιου τύπου οι μαθητές προβληματίζονται για την ορθότητα των υποθέσεων τους και στρέφονται σε νέες ενέργειες που θα ενισχύσουν τις εικασίες τους και την πίστη στην ορθότητα τους.

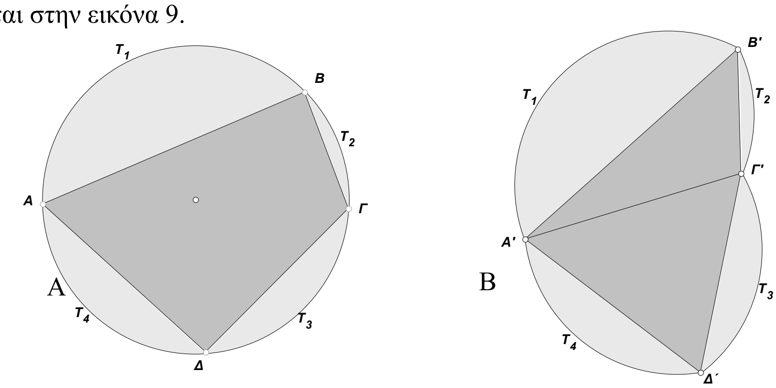
Η απάντηση στο ερώτημα αυτό θα διευκολυνθεί από την εποπτεία που προσφέρει ο δυναμικός χειρισμός του σχήματος και σε καμία περίπτωση δεν θα γίνει με φορμαλιστικό τρόπο (η τυπική κατασκευή μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των θεωρημάτων του Πτολεμαίου που δεν είναι το ζητούμενο στην περίπτωση αυτή). Πιο συγκεκριμένα, για να υπάρχει τετράπλευρο εγγράψιμο πρέπει να υπάρχει τετράπλευρο με άθροισμα απέναντι γωνιών π.χ. Α και Γ ίσο με δύο ορθές. Οι μαθητές ζητούν από το λογισμικό να υπολογίσει το άθροισμα των γωνιών αυτών και παρατηρούν ότι το άθροισμα αυτό παίρνει τιμές μικρότερες και μεγαλύτερες από 180^o. Θεωρώντας ότι το άθροισμα μεταβάλλεται συνεχώς θα υπάρχει κατάλληλη θέση των κορυφών ώστε το άθροισμα να γίνει ίσο με 180^o, επομένως ανάμεσα στα τετράπλευρα υπάρχει ένα που είναι εγγράψιμο (εικόνα 8).



Εικόνα 8

Δ. ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Κατασκευάζουμε το εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ και ένα τυχαίο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ με πλευρές ίσες με α, β, γ και δ. Μεταφέρουμε τα κυκλικά τμήματα με χορδές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ από το εγγράψιμο στις αντίστοιχες ίσες πλευρές του τυχαίου, όπως φαίνεται στην εικόνα 9.



Εικόνα 9

Τα τόξα στα σχήματα Α και Β σχηματίζουν κλειστή καμπύλη και τα εμβαδά των αντιστοίχων κυκλικών τμημάτων είναι ίσα. Γνωρίζουμε, όμως, ότι το μεγαλύτερο εμβαδόν το περικλείει ο κύκλος στο σχήμα Α, όπως είναι ήδη γνωστό από το πρόβλημα της Διδούς. Επομένως το εμβαδόν του εγγράψιμου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι μεγαλύτερο από αυτό του τυχαίου Α΄Β΄Γ΄Δ΄.

Ε. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Η παραπάνω ιδιότητα ισχύει για κάθε ν-γωνο, δηλαδή από όλα τα ν-γωνα με πλευρές ορισμένα ευθύγραμμα τμήματα διατεταγμένα με συγκεκριμένη σειρά το εγγράψιμο έχει το μέγιστο εμβαδόν.

ΣΤ. ΕΠΕΚΤΑΣΗ

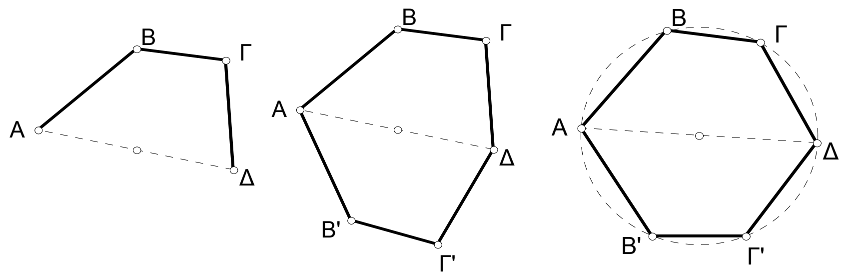
Μπορούμε να επεκταθούμε και σε άλλα προβλήματα διευρύνοντας την ενότητα των προβλημάτων μεγίστου εμβαδού. Μία τέτοια περίπτωση είναι το παρακάτω:

«Από όλα τα τετράπλευρα με δεδομένες τρεις πλευρές τους, να βρεθεί εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδόν»

Η λύση του προβλήματος αυτού ανάγεται στο προηγούμενο: Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΓΔ με δεδομένο μήκος, ενώ η πλευρά ΑΔ μεταβάλλεται.

Αν για κάθε ένα από αυτά τα τετράπλευρα θεωρήσουμε το συμμετρικό του ως προς την ΑΔ, προκύπτει ένα 6-γωνο με συγκεκριμένες πλευρές, όπως φαίνεται και στην εικόνα 10.

Σύμφωνα με τη γενίκευση του προηγούμενου προβλήματος, το εμβαδόν του ΑΒΓΔΓ΄Β΄ γίνεται μέγιστο όταν το 6-γωνο γίνει εγγράψιμο. Επομένως, λόγω της συμμετρίας το ΑΒΓΔ θα έχει μέγιστο εμβαδόν όταν οι κορυφές του Α, Β και Γ είναι σημεία ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΔ.



Εικόνα 10

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ – ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Η παραπάνω δραστηριότητα σχεδιάστηκε με αφορμή το ευρύτερο θέμα της μεγιστοποίησης επιφανειών και αποτελεί μέρος ενός συνόλου προβλημάτων. Αν και αναφέρεται στην ενότητα του εμβαδού της Γεωμετρίας της Β΄ Λυκείου επεκτείνεται και σε άλλες γνωστικές περιοχές της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας, καθώς επίσης και της Φυσική. Με αυτή τη μορφή θα μπορούσαμε να τη θεωρήσουμε σχέδιο εργασίας (project) με διαθεματικό χαρακτήρα που αντιβαίνει στη γραμμική ανάπτυξη της ύλης στο πλαίσιο του Αναλυτικού Προγράμματος.

Επικεντρωθήκαμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα και περιγράψαμε λεπτομερώς τη διαδικασία προσέγγισης του για να δείξουμε ότι η δημιουργία εικασιών και η επίλυση, αν αυτό είναι εφικτό, διευκολύνεται από το πλαίσιο δράσης του μαθητή το οποίο καθορίζεται από:

- το γνωστικό επίπεδο των μαθητών,
- την ενότητα μέσα στην οποία εντάσσεται το κάθε πρόβλημα,
- το περιβάλλον προσέγγισης, είτε αυτό είναι της δυναμικής γεωμετρίας, είτε του πειραματισμού με πραγματικά ή εικονικά μοντέλα και
- η δυνατότητα διαπραγμάτευσης ενεργειών και αποτελεσμάτων μέσα στη μαθητική κοινότητα.

Η απόδειξη τέλος του προβλήματος, αν επιτευχθεί, πρέπει να συνάδει με την διαδικασία που προηγήθηκε και να συνδυάζει την εποπτεία με το φορμαλισμό.

Τα εκπαιδευτικά λογισμικά προσφέρουν κατάλληλα περιβάλλοντα για τη διερεύνηση προβλημάτων και την ανάπτυξη εικασιών λειτουργώντας ως εργαλείο στα χέρια του μαθητή αλλά και του καθηγητή. Όμως ο τρόπος εργασίας μεταξύ διδάσκοντος και διδασκομένου διαφέρει. Ο πρώτος έχει ήδη ένα δομημένο τρόπο μαθηματικής σκέψης που τον διευκολύνει να πραγματοποιήσει τις κατάλληλες ενέργειες και να προσεγγίσει τη λύση. Ο δεύτερος χρειάζεται υποστήριξη που να του παρέχει σταδιακά τις απαιτούμενες πληροφορίες, δίνοντας του ταυτόχρονα περιθώρια να αυτενεργήσει. Η δράση των μαθητών δεν μπορεί να ασφυκτιά κάτω από την πλήρη καθοδήγηση του καθηγητή ούτε όμως να πραγματοποιείται ανεξέλεγκτα με τυχαίο και χαοτικό τρόπο.

Όπως διαφαίνεται από τα παραπάνω οι σύγχρονες τεχνολογίες μπορούν να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην διδακτική πράξη με την προϋπόθεση να υπάρχει παιδαγωγικός σχεδιασμός και σαφήνεια των στόχων σε σχέση με το περιεχόμενο και την διαδικασία προσέγγισης του προβλήματος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. F.G.-M. (1952), Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών), Α. Καραβία, Αθήνα
2. Guimaraez L., Belfort A., Bellemain F. (2002), Geometry: Back to the future?, *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*, Hersonissos, Crete, Greece
3. Sharygin I. F. (1997), Από ένα ρωμαϊκό μύθο στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα … ή πώς να πετύχετε μια συμφέρουσα αγορά, *Quantum,* 4, 2, 38-42
4. Tikhomirov V. M. (1999), Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα. Κάτοπτρο, Αθήνα
5. Διδάσκοντας τη Γεωμετρία με το The Geometer's Sketchpad, Βιβλίο Καθηγητή (2001), Key Curriculum Press, Ι.Τ.Υ., Π.Ι., Πληροφορική Τεχνογνωσία, Αθήνα.
6. Κοντογιάννης Γ. (2002), Απόπειρα χαρακτηρισμού των «ανοικτών καταστάσεων και μεθοδολογίας των Μαθηματικών. Αθήνα προβληματισμού» με ιστορική τεκμηρίωση. Διπλωματική εργασία. Μ.Π.Σ. Διδακτικής
7. Μαρμαρινός Ι. Γ. (2002), Το σχολικό πρόγραμμα, Αθήνα