

## ΓΡΑΦΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΝΟΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ: «ΤΟ ΜΥΣΤΙΚΟ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΤΗ ΜΠΑΡΜΠΑΝΕΓΚΡΑ»

**Πράπα Ελένη**  
Καθηγήτρια Μαθηματικών  
Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης  
lenap56@pathfinder.gr

**Μαυρογένης Κωνσταντίνος**  
Καθηγητής Μαθηματικός  
Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

**Σκούρα Ιωάννα**  
Καθηγήτρια Μαθηματικών  
Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης  
cgeorgou@ppp.uoa.gr

**Ιωάννου Στυλιανός**  
Δρ., Μαθηματικός Επιμορφωτής ΤΠΕ  
& Εκπαιδευτικού Λογισμικού  
sioannou@sch.gr

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός αυτής της δραστηριότητας είναι η αναζήτηση εναλλακτικών προσεγγίσεων στη γραφική αλλά/και αλγεβρική επίλυση ενός συστήματος δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους με την αξιοποίηση των δυνατοτήτων ενός ανοιχτού λογισμικού. Στην παρούσα περίπτωση επιλέχθηκαν τρία διαφορετικά ως προς τη λειτουργία τους λογισμικά: *Microworlds Pro*, *The Geometer's Sketchpad*, *Function Probe*. Η αξιοποίηση αυτών των περιβαλλόντων μπορεί να είναι συμπληρωματική ή/και ανεξάρτητη αλλά σε καμιά περίπτωση ταυτόχρονη στη διάρκεια μιας διδακτικής ώρας. Κάθε ένα από αυτά αξιοποιείται από μια διαφορετική οπτική γωνία και μέθοδο αλλά με κοινό στόχο να προσφέρει στο μαθητή βοήθεια τόσο στην κατανόηση του σχηματισμού ενός συστήματος εξισώσεων που η λύση του θα είναι η απάντηση στο πρόβλημα που τίθεται. Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το ειδικό φύλλο εργασίας που περιγράφει τα βήματα σε αυτή τη δραστηριότητα. Το ενδιαφέρον εστιάζεται τόσο στην κατανόηση της ανάγκης του σχηματισμού του συστήματος εξισώσεων για την επίλυση του προβλήματος όσο και στην προσέγγιση της λύσης με γραφική μέθοδο ως το σημείο τομής των δύο γραφικών παραστάσεων αυτών των εξισώσεων.

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** Μαθηματικά Γυμνασίου, Ανοιχτό λογισμικό, οπτικοποίηση, αποτύπωση σημείων, συντεταγμένες σημείου, εξίσωση ευθείας, σύστημα εξισώσεων, εικασία και επαλήθευση.

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με την προτεινόμενη δραστηριότητα οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες που αποβλέπουν στην επίλυση ενός φανταστικού προβλήματος η λύση του οποίου διαπραγματεύεται μαθηματικές έννοιες που συναντούν στον πραγματικό κόσμο του

σχολείου. Σκοπός των διαφορετικών προσεγγίσεων με τη βοήθεια των τριών λογισμικών είναι μεταξύ άλλων και: (1) η καλύτερη οπτικοποίηση ενός προβλήματος (2)η αξιοποίηση της δυναμικής διαχείρισης αντικειμένων στην οθόνη του υπολογιστή για την ενεργοποίηση διαδικασιών ενεργητικής μάθησης (3)αξιοποίηση της στρατηγικής «προβλέπω και στη συνέχεια επαληθεύω» με τη βοήθεια των εργαλείων των λογισμικών (4)η ανάκληση και εφαρμογή γεωμετρικών γνώσεων (5)η σύνδεση της λύσης ενός προβλήματος με το σημείο που τέμνονται δύο γραφικές – αφηρημένες έννοιες – παραστάσεις (6)η υπερνίκηση των δυσκολιών που παρουσιάζονται στη προσπάθεια των μαθητών να επιλύσουν γραφικά ένα σύστημα με τον παραδοσιακό τρόπο. Αναλύεται καταρχάς στους μαθητές το πρόβλημα το οποίο αναφέρεται στον τρόπο που μπορεί κάποιος να ανακαλύψει το σημείο που είναι κρυμμένος ο θησαυρός ενός πειρατή. Στη φάση αυτή οι μαθητές εργάζονται για να αποτυπώσουν τα σημεία που περιγράφονται στο πρόβλημα. Χαράζοντας τις κατάλληλες γραμμές αναμένεται μια πρώτη προσέγγιση του τρόπου επίλυσης του προβλήματος με τη δημιουργία ενός συστήματος εξισώσεων καθώς και τη δημιουργία μερικών εικασιών για τη λύση. Τα συγκεκριμένα λογισμικά συνεισφέρουν το καθένα με το δικό του τρόπο στην επίτευξη των στόχων που έχουν τεθεί. Το λογισμικό MicroWorlds Pro, με τη δυνατότητα μιας πλούσιας πολυμεσικής "οπτικοποίησης" του προβλήματος και την άμεση διαχείριση αντικειμένων μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση του προβλήματος, στην δημιουργία εικασιών ενώ κάνει την εργασία ελκυστικότερη. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η χρήση του λογισμικού βοηθάει στην προσεγγιστική εύρεση των συντεταγμένων του σημείου του θησαυρού. Το λογισμικό Sketchpad, με τη σειρά του, βοηθά να αποτυπωθούν τα δεδομένα του προβλήματος με αφαιρετικό τρόπο, με αποτέλεσμα ο μαθητής να μπορεί, μέσω αυτών των αφαιρέσεων, να συλλάβει τη μαθηματική δομή του συγκεκριμένου προβλήματος. Επιπλέον, με τα εργαλεία που διαθέτει το λογισμικό ο μαθητής μπορεί να προσδιορίσει με ακρίβεια εκατοστού το σημείο του θησαυρού δηλαδή να επαληθεύσει ακόμα μια φορά αλλά με διαφορεικό τρόπο την λύση που ήδη έχει προσεγγίσει. Μπορεί ακόμα να βοηθήσει τους μαθητές να προσδιορίσουν ένα σύστημα δύο εξισώσεων που η λύση του είναι η λύση του προβλήματος. Εναλλακτικά και συμπληρωματικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί το λογισμικό Function Probe στο οποίο μπορεί να εισαχθεί ο χάρτης του θησαυρού και ένα ειδικά διαμορφωμένο σύστημα συντεταγμένων. Οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν το περιβάλλον είτε με ευρετικό τρόπο όπου ύστερα από την αποτύπωση των σημείων προσδιορίζουν τις εξισώσεις των ευθειών που το σημείο τομή τους είναι η λύση του προβλήματος είτε για τη γραφική επίλυση του συστήματος με την κατασκευή των γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων που ήδη έχουν προσδιορίσει και να επαληθεύσουν αν διέρχονται από τα σημεία που περιγράφει το πρόβλημα και συνεπώς το σημείο τομής τους που αποτελεί και τη λύση του προβλήματος. Το λογισμικό Function Probe έρχεται να ενδυναμώσει την ερευνητική διάθεση του μαθητή, με τη δυνατότητα αναζήτησης, καταγραφής και αξιολόγησης πληροφοριών που προσφέρει. Η μαθηματική μοντελοποίηση, που επιτυγχάνεται με το λογισμικό αυτό, βοηθά το μαθητή να συνειδητοποιήσει ότι τα μαθηματικά δεν κατοικούν στον "κόσμο των ιδεών", αλλά είναι συνυφασμένα με όλες τις πτυχές του αισθητού κόσμου. Η λύση επομένως του προβλήματος, το σημείο που ο πειρατής έχει κρύψει το θησαυρό, αναμένεται να δοθεί ως συντεταγμένες ενός σημείου. Αυτές οι συντεταγμένες μπορεί να προσεγγιστούν με

γραφικό τρόπο και να επαληθευθούν με αλγεβρική μέθοδο μέσα από τη λύση ενός συστήματος που οι μαθητές πρέπει να σχηματίσουν με τη βοήθεια των δεδομένων και των οδηγιών.

Στο περιβάλλον του Microworlds δίνεται στους μαθητές η δυνατότητα να μεταφράσουν και αποτυπώσουν τα δεδομένα του προβλήματος στην οθόνη του υπολογιστή με άμεσο χειρισμό αντικειμένων σε ένα μικρό εξειδικευμένο πρόγραμμα που πρέπει να έχει ετοιμάσει ο διδάσκοντας. Είναι μια προσπάθεια οπτικοποίησης των πρωταγωνιστών του μύθου. Οι μαθητές τοποθετούν τις χελώνες – πειρατές στα σημεία που περιγράφονται. Οι ευθείες που ενώνουν τα κατάλληλα σημεία αναπαριστούν τα σχοινιά που κρατούν οι πειρατές. Οι εξισώσεις των ευθειών, που ενώνουν τα σημεία αυτά, πρέπει να προσδιοριστούν από τους μαθητές και να επαληθευθούν με τη βοήθεια του λογισμικού. Στο περιβάλλον του Sketchpad οι μαθητές χειρίζονται αντικείμενα με τη μορφή γεωμετρικών σχημάτων που παριστάνουν τα σημεία που περιγράφει το πρόβλημα. Οδηγούνται έτσι στο σχηματισμό του συστήματος εξισώσεων τη λύση του οποίου μπορούν να την επαληθεύσουν με γραφικό τρόπο ως σημείο τομής δύο ευθειών. Η διαφορά των δύο προγραμμάτων βρίσκεται στο τρόπο της οπτικοποίησης του προβλήματος, του χειρισμού των αντικειμένων αλλά και στη μέθοδο δημιουργίας του μικρού εξειδικευμένου προγράμματος για τις ανάγκες της επίλυσης αυτού του προβλήματος. Το περιβάλλον του Function Probe μπορεί να αξιοποιηθεί για τη δημιουργία των γραφικών παραστάσεων και την επαλήθευση της λύσης αλλά και για τη δημιουργία αλγορίθμου που θα βοηθήσει στο σχηματισμό του συστήματος όπως επίσης και να δώσει τη λύση του συστήματος. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στο Microworlds ως κρυμμένο μαθηματικό μοντέλο σε απλές διαδικασίες.

Οι έννοιες που εμπλέκονται είναι: συντεταγμένες σημείου, γραφική παράσταση συνάρτησης, εξίσωση ευθείας, σύστημα εξισώσεων.

Ο κύριος διδακτικός στόχος είναι η δημιουργία συστήματος εξισώσεων που η επίλυσή του να αποτελεί τη λύση ενός προβλήματος. Ως δευτερεύοντες στόχοι είναι η εμπέδωση γνώσεων όπως οι συντεταγμένες σημείου, η εύρεση της εξίσωσης μιας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία και η μέθοδος λύσης ενός συστήματος καθώς και η γραφική επαλήθευση αυτής.

Οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν το ειδικό φύλλο εργασίας που περιγράφει τα βήματα σε αυτή τη δραστηριότητα. Το ενδιαφέρον εστιάζεται τόσο στην κατανόηση του σχηματισμού του συστήματος εξισώσεων για την επίλυση του προβλήματος όσο και στην γραφική λύση του. Στην περίπτωση της παραδοσιακής διδασκαλίας ο μαθητής θα αποτυπώσει τα δεδομένα του προβλήματος στο ειδικό τετραγωνισμένο χαρτί, θα σχεδιάσει τις ευθείες και θα προσεγγίσει τη λύση από τις συντεταγμένες του σημείου τομής. Το λογισμικό θα προσθέσει την οπτικοποίηση του προβλήματος ή τη βοήθεια στον προσδιορισμό των εξισώσεων ενώ ο μαθητής θα επαληθεύσει καλύτερα τη λύση. Η δυσκολία των μαθητών εντοπίζεται στην κατανόηση των δεδομένων ενός προβλήματος, στο σχηματισμό του συστήματος καθώς και στη γραφική επίλυση του και μάλιστα στη περίπτωση δεκαδικών προσεγγίσεων.

Στο Γυμνάσιο η γραφική επίλυση συστημάτων περιλαμβάνεται στο 8<sup>ο</sup> Κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου ενώ οι γενικοί στόχοι είναι(Οδηγίες 2002-03):

- Οι μαθητές να μπορούν να λύσουν γραφικά ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.
- Η γραφική επίλυση ενός συστήματος γίνεται με σκοπό αφενός να κατανοήσουν οι μαθητές την έννοια της λύσης ενός συστήματος και αφετετέρου τις έννοιες του αδύνατου ή του αόριστου.

Επισημαίνεται ότι:

- Οι προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών πάνω στο γνωστικό αντικείμενο που έχει επιλεγεί εντοπίζονται στην έννοια συντεταγμένες σημείου, εξίσωση ευθείας και λύση συστήματος.
- οι προαπαιτούμενες τεχνικές γνώσεις για τη χρησιμοποίηση του τεχνολογικού μέσου με τη βοήθεια του οποίου θα υλοποιηθεί η δραστηριότητα εντοπίζονται στην απλή εξοικείωση με τη χρήση του ποντικιού αλλά και στο χειρισμό αντικείμενων που περιλαμβάνει κάθε μικρό εξειδικευμένο πρόγραμμα.
- Η προτεινόμενη δραστηριότητα μπορεί να ενταχθεί στο σχολείο σύμφωνα με το αναλυτικό και ωρολόγιο πρόγραμμα, στη διδασκαλία της ενότητας § 8.1 της Γ΄ Γυμνασίου.
- Για την εφαρμογή της δραστηριότητας απαιτείται ένα φύλλο εργασίας για τους μαθητές, η καλή λειτουργία του εργαστηρίου υπολογιστών με τα λογισμικά εγκατεστημένα και η συγκρότηση ομάδων εργασίας.
- Οι μαθητές εργάζονται σε μικρές ομάδες και προσπαθούν να υλοποιήσουν το φύλλο εργασίας. Ο διδάσκοντας παρακολουθεί, συντονίζει και παροτρύνει αυτούς που δυσκολεύονται.

#### ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Το νησί των θησαυρών

Είναι πιθανόν να έχετε ακούσει για τον διάσημο Άγγλο πειρατή Μαυρογένη, αλλά ξέρετε τον Ισπανό ξάδερφό του «Μπαρμπανέγκρα»; Μάλλον όχι. Ήταν ένας μαθηματικός των ανοιχτών θαλασσών. Όταν έθαψε τον θησαυρό του, το έκανε μ' έναν πολύ αλγεβρικό τρόπο. Σας φαίνεται απίστευτο; Κι όμως το έκανε! Κι έβαλε σε μεγάλους μπελάδες τον απόγονό του! (Ο οποίος εν προκειμένω δεν ήταν και κανένα αστέρι στα μαθηματικά...). Βλέπετε ο Μπαρμπανέγκρα πέθανε σε μια επιδρομή και δεν μπόρεσε να πάρει τον θησαυρό του. Άφησε όμως έναν χάρτη μαζί με μερικές οδηγίες σ' ένα ημερολόγιο, του τα οποία βρήκε μετά από πολλά χρόνια ο απόγονος του σ' ένα παλιό μπαούλο ....

... Εγώ, ο Γάντζος, ο Χαντζάρας κι ο Ξυλοπόδαρος πήγαμε στο νησί με τη βάρκα. Είχα πάρει μαζί μου δυο σχοινιά. Στάθηκα σ' ένα συγκεκριμένο φοινικόδεντρο -κάτω από τη σκιά του, γιατί είχε μια διαολεμένη ζέστη- το οποίο βρισκόταν 3 μέτρα ανατολικά και 4 μέτρα βόρεια από τον μεγάλο βράχο στα αριστερά του μικρού λιμανιού. Κράτησα το ένα σχοινί στο χέρι μου. Έδωσα την άλλη στον Χαντζάρα



και του είπα να βαδίσει 6 μέτρα νότια και κατόπιν 8 μέτρα ανατολικά. Έδωσα μετά τις άκρες του άλλου σχοινιού στους άλλους δυο άντρες μου, κατευθύνοντας τον Γάντζο να βαδίσει σ' ένα σημείο 6 μέτρα ανατολικά και 2 μέτρα βόρεια από το δέντρο. Είπα τέλος στον Ξυλοπόδαρο να πάει σ' ένα σημείο 6 μέτρα νότια και 2 μέτρα δυτικά από μένα. Από τη στιγμή που ήμασταν όλοι στη θέση μας, τεντώσαμε τα σχοινιά ώστε να σχηματιστούν δυο ευθείες γραμμές. Το σημείο όπου

αυτές οι ευθείες διασταυρώνονται, ήταν το μέρος όπου εγώ ο Μπαρμπανέγκρα έβαλα τους άντρες μου να σκάφουν για να θάψουν τον θησαυρό.

Μήπως μπορείτε να βοηθήσετε τον απόγονο του Μπαρμπανέγκρα να βρει τις συντεταγμένες του σημείου X που είναι θαμμένος ο θησαυρός;

### 1Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ - ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ MICROWORLDS PRO



Οι μαθητές καλούνται να ανοίξουν ένα έτοιμο εξειδικευμένο αρχείο που έχει δημιουργηθεί με το λογισμικό Microworlds Pro. Αυτό περιλαμβάνει το χάρτη του νησιού που αναφέρεται στο πρόβλημα εφοδιασμένο με ένα πλέγμα καθέτων και οριζοντίων γραμμών για το προσδιορισμό των συντεταγμένων ως προς σύστημα Oxy. Υπάρχουν επίσης χελώνες με τις φιγούρες των πειρατών καθώς και εργαλεία για την ακριβή μετακίνησή τους σύμφωνα με τα στοιχεία του προβλήματος.

Προτείνονται οι ακόλουθες εργασίες:

1α) Οι μαθητές τοποθετούν μία – μία τις χελώνες πειρατές στο κατάλληλο σημείο. Ο Μπαρμπανέγκρα θα τοποθετηθεί στο  $O(0,0)$  και οι υπόλοιπες στη θέση που θα πάει ύστερα από τα βήματα που περιγράφονται. (Η αρχική τοποθέτηση των χελωνών γίνεται με ένα κλικ με το ποντίκι πάνω στη φιγούρα του πειρατή.). Στη συνέχεια με τη βοήθεια των εργαλείων του λογισμικού τις μετακινούν σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος. Ο προσανατολισμός των κινήσεων δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Δυτικά	σημαίνει μετακίνηση κατά τη διεύθυνση	Ox'.
Ανατολικά	>>	Ox
Βόρεια	>>	Oy
Νότια	>>	Oy'

Οι μαθητές συμπληρώνουν τον ακόλουθο πίνακα με τις κινήσεις των πειρατών όπως περιγράφονται στο πρόβλημα.

Πειρατής	Αναμενόμενη απάντηση των μαθητών				Βήματα από τον Μπαρμπανέγκρα
	Ανατολικά	Δυτικά	Νότια	Βόρεια	
Μπαρμπανέγκρας	3			4	Βήματα από (0,0)
Χαντζάρας	8		6		Βήματα από τον Μπαρμπανέγκρα
Γάντζος	6			2	
Ξυλοπόδαρος		2	6		

Για να κινηθούν οι χελώνες-πειρατές προς το σημείο που υποδεικνύει το πρόβλημα ακολουθείται η διαδικασία: Ρυθμίζονται οι μεταβολείς σύμφωνα με τα

βήματα του προβλήματος βάζοντας 0 στις κινήσεις που δεν θα γίνουν. Για παράδειγμα για τον Μαρμπανέγκρα θα γίνουν οι ρυθμίσεις: Ανατολικά: 3 , Δυτικά: 0 , Νότια: 0 , Βόρεια: 4. Στη συνέχεια θα γραφτεί η εντολή «Μαρμπανέγκρα, Α Δ Ν Β» και κλικ στο κουμπί «Εκτέλεση Εντολής».

1β) Οι μαθητές πρέπει να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των σημείων που βρίσκονται οι χελώνες - πειρατές σχετικά με το προκαθορισμένο σύστημα Oxy και όχι με το σύστημα συντεταγμένων του λογισμικού και να συμπληρώσουν τον ακόλουθο πίνακα:

Πειρατής	Ονομασία σημείου	Αναμενόμενη απάντηση των μαθητών	
		X	Y
Μαρμπανέγκρας	M	3	4
Χαντζάρας	X	11	-2
Γάντζος	Γ	9	6
Ξυλοπόδαρος	Ξ	1	-2

1γ) Οι μαθητές πρέπει να ενώσουν με τα εργαλεία του λογισμικού (με τα σχοινιά) τα σημεία που αναφέρει το πρόβλημα και να προσεγγίσουν τις συντεταγμένες του σημείου του θησαυρού.

	Αναμενόμενη απάντηση των μαθητών	
	X	Y
Σημείο του θησαυρού (με προσέγγιση μονάδων)	5	2

## 2<sup>η</sup> ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ : ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ SKETCHPAD

Οι μαθητές οδηγούνται να υπολογίσουν το σημείο του θησαυρού με αλγεβρικό τρόπο και να επαληθεύσουν τη γραφική λύση που έχει ήδη δοθεί στο πρόβλημα. Στο περιβάλλον του Sketchpad οι πειρατές παίρνουν τη μορφή σημείων τα οποία οι μαθητές πρέπει να αποτυπώσουν στο σύστημα αξόνων του λογισμικού. Στη συνέχεια πρέπει να ενώσουν τα σημεία αυτά με ευθείες και να ορίσουν το σημείο τομής τους. Οι ευθείες αναπαριστούν τα σχοινιά που κρατούν οι πειρατές. Οι μαθητές προσδιορίζουν τις συντεταγμένες του σημείου τομής (που είναι το σημείο του θησαυρού) και επαληθεύουν με τη βοήθεια του λογισμικού. Η αλγεβρική επίλυση του προβλήματος διευκολύνεται από τη βοήθεια που προσφέρει το λογισμικό στην εύρεση των εξισώσεων των ευθειών που ενώνουν τα σημεία των πειρατών. Έτσι οι μαθητές ασχολούνται μόνο με την επίλυση ενός συστήματος και συγκρίνουν τη λύση με τις συντεταγμένες που προσδιόρισαν με τη γραφική μέθοδο.

Προτείνονται οι ακόλουθες εργασίες

2α) Οι μαθητές καλούνται να αποτυπώσουν στο σύστημα αξόνων του λογισμικού τα σημεία, που πρέπει να τοποθετηθούν οι πειρατές, των οποίων οι συντεταγμένες έχουν ήδη προσδιοριστεί παραπάνω. (Η αποτύπωση γίνεται με τη διαδικασία Μενού Γράφημα>Αποτύπωση σημείων>...πληκτρολόγηση τιμών...>Enter)

2β) Με τη βοήθεια των εργαλείων του λογισμικού ενώνουν τα σημεία με ευθείες και προσδιορίζουν το σημείο τομής τους. (η κατασκευή ακολουθεί τα βήματα: Επιλογή δύο σημείων με τη χρήση του Shift > Κατασκευή > Ευθεία)

2γ) Μετρούν τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (επιλογή σημείου > Μέτρηση > Συντεταγμένες). Με τον τρόπο αυτό επαληθεύουν τη γραφική λύση που έδωσαν ήδη στο πρόβλημα.

Το σημείο του θησαυρού έχει συντεταγμένες  $(x,y) = ( , )$

2δ) Οι μαθητές περιγράφουν τον αλγεβρικό τρόπο με τον οποίο θα λύσουν το πρόβλημα. Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στο ερώτημα «ποια είναι η γενική μορφή της εξίσωσης μιας ευθείας;». Αναμένεται να προσδιορίσουν τις εξισώσεις των ευθειών του σχεδίου και να λύσουν αλγεβρικά το σύστημα. (Η εύρεση των εξισώσεων γίνεται: Επιλογή ευθείας > Μέτρηση > Εξίσωση)

Ευθεία	Αναμενόμενη απάντηση των μαθητών	
	Εξίσωση ευθείας	Λύση του συστήματος
ΜΧ	$y = -0,75x + 6,25$	$x =$
ΓΞ	$y = x - 3$	$y =$

### 3<sup>η</sup> ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ : ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ FUNCTION PROBE

Το περιβάλλον του λογισμικού μπορεί να βοηθήσει στη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος είτε στη αποτύπωση των ευθειών που ορίζουν τα σχοινιά και να οδηγηθούν οι μαθητές στη γραφική λύση είτε στην επαλήθευση της αλγεβρικής λύσης του συστήματος με την αυτόματη διαδικασία λύσης που προτείνει. Στην γραφική προσέγγιση αυτή οι μαθητές πρέπει:

- Να προσδιορίσουν τις συντεταγμένες των σημείων που θα σταθούν οι πειρατές σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος.
- Να αποτυπώσουν τα σημεία αυτά στο γραφικό περιβάλλον του λογισμικού
- Να ενώσουν τα σημεία που περιγράφει το πρόβλημα
- Να εικάσουν για τις συντεταγμένες του σημείου τομής.

Στην αλγεβρική προσέγγιση οι μαθητές πρέπει:

- Να προσδιορίσουν τις εξισώσεις των ευθειών και να σχηματίσουν το σύστημα που πρέπει να λύσουν.
- Να δώσουν τα κατάλληλα στοιχεία στο λογισμικό και να πάρουν ως απάντηση τη λύση του συστήματος.

### ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

- Η προσέγγιση με το λογισμικό Microworlds Pro προσφέρει μια πλούσια οπτικοποίηση των δεδομένων του προβλήματος και προσθέτει ένα παιγνιώδη τρόπο στη γραφική προσέγγιση της λύσης.
- Η προσέγγιση με το Sketchpad μπορεί να λειτουργήσει είτε ως ανεξάρτητη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος με τη βοήθεια του λογισμικού είτε ως συμπληρωματική στη γραφική προσέγγιση με το Microworlds. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ένα μετασχηματισμό των ηρώων του μύθου σε γεωμετρικά σχήματα. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε μια συμπληρωματική διαδικασία όπως το Microworlds αναλαμβάνει ρόλο στη γραφική προσέγγιση και το

Sketchpad το ρόλο του εργαλείου επαλήθευσης αλλά και της εύρεσης των εξισώσεων των ευθειών. Η εργασία με το Sketchpad φαίνεται να απλουστεύει την προεργασία για την επίλυση του προβλήματος με τη βοήθεια του υπολογιστή μια και δεν απαιτείται προετοιμασία ενός εξειδικευμένου προγράμματος.

- Η προσέγγιση με το Function probe προτείνεται να λειτουργήσει ανεξάρτητα από το Microworlds Pro σχετικά με τη γραφική επίλυση αλλά συμπληρωματικά με την εργασία στο Sketchpad στην αλγεβρική επίλυση του συστήματος ως εργαλείο επαλήθευσης.

Οι διαφορές με τον παραδοσιακό τρόπο εργασίας για τη λύση του ίδιου προβλήματος εντοπίζονται:

- Συμμετοχή των μαθητών στα δρώμενα του προβλήματος με την πλούσια οπτικοποίηση
- Θετική παρακίνηση των μαθητών με την παιγνιώδη μορφή της γραφικής επίλυσης
- Ανάκληση και χρήση γεωμετρικών γνώσεων για την κατασκευή ευθειών.
- Εικασία ή εύρεση και επαλήθευση με τη βοήθεια του λογισμικού όπου το λάθος μπορεί να αξιοποιηθεί για την κατανόηση των εννοιών που εμπλέκονται με το πρόβλημα.

#### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. <http://www.rochedalss.qld.edu.au/pirates>
2. X Marks the Spot, <http://www.mathforum.com/library/problems/algebra.html>
3. Αλμπινίσης Α., Γρηγοριάδης Σ. κ.αλ., Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου, ΟΕΔΒ, 2002
4. Ιωάννου Σ., Εισαγωγή των ΤΠΕ στην εκπαίδευση: Η περίπτωση αξιοποίησης Εκπαιδευτικού Λογισμικού στη Μαθηματική Εκπαίδευση, Διδακτορική Διατριβή, Αθήνα 2002.