

**Ο ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΚΑΙ Η ΧΕΛΩΝΑ: ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ
ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗΣ ΕΝΟΣ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ
ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ (MODELLUS) ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ
ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ ΣΤΗ
Β/ΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ**

Ξεναρίου Καλλιόπη
Μαθηματικός,
Μεταπτυχιακή φοιτήτρια Π.Τ.Δ.Ε.
Παν/μίου Αθηνών
pxenariou2000@yahoo.com

Κανελλοπούλου Ελένη
Δασκάλα
Μεταπτυχιακή φοιτήτρια Π.Τ.Δ.Ε.
Παν/μίου Αθηνών
ekanelop@primedu.uoa.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα τελευταία 50 χρόνια η ραγδαία εξέλιξη των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) και η εξάπλωσή τους σε όλους σχεδόν τους τομείς της μαθηματικής έρευνας, έχουν επιφέρει σημαντικές αλλαγές τόσο στη φύση όσο και στην χρήση της μαθηματικής γνώσης, συνεπώς και στις διδακτικές της προσεγγίσεις. Οι αλλαγές αυτές καθιστούν επιτακτική την ανάγκη να επαναπροσδιοριστούν πρακτικές που αφορούν στις νέες αυτές προσεγγίσεις, ώστε να ενισχυθούν αποτελεσματικά οι μαθησιακές και κοινωνικοποιητικές λειτουργίες της σχολικής τάξης. Το παρόν άρθρο προσπαθεί να σκιαγραφήσει τις πρακτικές αυτές στην διεθνή αλλά και την ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα και προτείνει 9 σενάρια διδακτικής παρέμβασης πάνω στη διδασκαλία επιλεγμένων μαθηματικών εννοιών της β/θμιας εκπαίδευσης, με την αξιοποίηση του προγράμματος *Modellus*.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Διδακτική Μαθηματικών, Μοντελοποίηση, Εκπαιδευτικό λογισμικό: *Modellus*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία 50 χρόνια η κοινωνική πραγματικότητα είναι συνυφασμένη με πολιτικές, οικονομικές και πολιτισμικές παρεμβάσεις που έχουν ως κύριο χαρακτηριστικό τους τη μεταβλητότητα. Παράλληλα η επιστημονική και τεχνολογική εξέλιξη συμβάλλουν σε μια έντονη ρευστότητα τόσο στον τομέα της γνώσης όσο και στα κοινωνικά δρώμενα. Επιπλέον οι συνεχείς ανακαλύψεις και καινοτομίες στα διάφορα πεδία της επιστήμης και τεχνολογίας επιφέρουν συχνή αναθεώρηση της γνώσης. (Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ), 2002).

Όσον αφορά τη μαθηματική γνώση, η δημιουργία νέων πεδίων έρευνας (συνεχής αύξηση του όγκου των γνώσεων και γρήγορη παλαιώσή τους) αλλά και η εξάπλωση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) σε όλους σχεδόν τους τομείς των πεδίων αυτών, επηρεάζουν σημαντικά τα κοινωνικά δεδομένα και διαμορφώνουν νέες τάσεις σε σχέση με την φύση της μαθηματικής επιστήμης αλλά και την εξέλιξή της (Μεϊμάρης κ.ά., 1997).

Επιπλέον η χρήση της μαθηματικής γνώσης σε πολυάριθμες, εξαιρετικά πολύπλοκες και απαιτητικές καταστάσεις, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της Τεχνητής Νοημοσύνης, θέτει την διεπιστημονικότητα μοχλό του νέου παραδείγματος και για την επιστήμη των μαθηματικών.

Ο συνδυασμός των παραπάνω με τις επιρροές των σύγχρονων ρευμάτων της θεωρίας της μάθησης καθιστά επιτακτική την ανάγκη να επαναπροσδιοριστούν πρακτικές που αφορούν στις νέες διδακτικές προσεγγίσεις κατά τη διαδικασία μάθησης των σχολικών μαθηματικών, ώστε να ενισχυθούν αποτελεσματικά οι μαθησιακές και κοινωνικοποιητικές λειτουργίες της σχολικής τάξης.

Το παρόν άρθρο προσπαθεί να σκιαγραφήσει τις πρακτικές αυτές στην διεθνή αλλά και την ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα, με εστίαση στην αξιοποίηση των ΤΠΕ και ειδικότερα των προγραμμάτων μοντελοποίησης. Στο πλαίσιο αυτό, προτείνονται 9 σενάρια διδακτικής παρέμβασης πάνω στη διδασκαλία επιλεγμένων μαθηματικών εννοιών της β/θμιας εκπαίδευσης, με την αξιοποίηση του εκπαιδευτικού λογισμικού Modellus.

ΟΙ ΝΕΕΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΤΑ ΤΗΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ-ΜΑΘΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Στη διεθνή βιβλιογραφία της διδακτικής των μαθηματικών, τα μαθηματικά αποτελούν πλέον μέσο για την επίλυση (ατομικών και κοινωνικών) προβλημάτων που σχεδιάζονται έτσι ώστε να ανταποκρίνονται σε όσο το δυνατό περισσότερα «πραγματικά και άμεσα προβλήματα, αναφερόμενα σε αληθινές καταστάσεις». (Keitel, 2000)

Επίσης τόσο η από καθέδρας διδασκαλία, που είχε ως κύριο άξονα τη θεωρία (αξιώματα, ορισμούς κτλ) χωρίς να τη συνδέει με κάποιο πλαίσιο εφαρμογών, όσο και η μάθηση που εστίαζε στις μαθηματικές δραστηριότητες, χωρίς να τις εντάσσει σε οργανωμένες γνωστικές δομές, συγκλίνουν σήμερα προς την «ρεαλιστική» κατεύθυνση, δηλαδή «...εκείνον τον τρόπο διδασκαλίας που νοιάζεται τόσο για τα πλαίσια προβληματισμού, όσο και για τη θεωρία». Ο τρόπος αυτός, «οδηγεί τους μαθητές στο να ανακαλύπτουν δεσμούς ανάμεσα σε κάθε μαθηματική δομή, στα ερωτήματα που τη δημιούργησαν και τις εφαρμογές της» (Chevallier, 2000)

Επιπλέον, καθώς όλο και περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα εντάσσουν δραστηριότητες μοντελοποίησης κατά την ολοκληρωμένη προσέγγιση διαφορετικών γνωστικών αντικειμένων (Keitel, 2000, Raj & Buker, 2002), η εμφάνιση λογισμικών τα οποία παρέχουν την δυνατότητα παραγωγής δυναμικών μοντέλων, στην τάξη των μαθηματικών (που είναι η κατ' εξοχήν επιστήμη της μοντελοποίησης) δίνει την ευκαιρία για μια καινούρια θέαση της διδακτικής τους. Τα μαθηματικά αντικείμενα αποκτούν μια νέα επιστημολογική υπόσταση, μετατρέπονται σε αντικείμενα πιο «συγκεκριμένα» (Teodoro, 1997). Ο κόσμος των μαθηματικών εννοιών αποκτά έτσι την μορφή ενός φανταστικού μικρόκοσμου και οι μαθητές, αναλύοντας δεδομένα, κατασκευάζοντας και ελέγχοντας εικασίες και υποθέσεις για κανόνες και νόμους, είναι ικανοί να προβλέψουν: «Τι θα γίνει μετά...; Τι θα γίνει αν...; Τι ακριβώς γίνεται σε πολύ συγκεκριμένες συνθήκες;» (Carson, 2000). Αλληλεπιδρούν με τον μικρόκοσμο αυτό δυναμικά και κατανοούν με ουσιαστικό τρόπο την φύση της επιστήμης και τις επιμέρους έννοιές της. Έτσι οι μαθηματικές έννοιες και οι ιδιότητες τους

προσεγγίζονται, ανακαλύπτονται και οικοδομούνται βαθμιαία (Ράπτης & Ράπτη, 2001). Η κατευθυνόμενη εποπτεία, εμπλουτίζοντας συγχρόνως μέσω αισθητηριακών δεδομένων τον τόσο χρήσιμο για τα μαθηματικά χώρο της διαίσθησης, οδηγεί στην εικασία. Αυτή με τη σειρά της, στη δυνατότητα για βαθύτερο στοχασμό, και πλήρη κατανόηση και ανάλυση τόσο του προβλήματος όσο και της πορείας προς τη λύση του. Για το λόγο αυτό, οι μαθητές ασκούνται ταυτόχρονα όχι μόνο στο να χρησιμοποιούν την τεχνική της μοντελοποίησης για να προσεγγίζουν προβλήματα της καθημερινής τους ζωής, αλλά και να αναλύουν κριτικά τα αποτελέσματα της επινόησης και χρήσης μοντέλων. (Κόμης κ.ά., 2002).

Για να μπορέσουν όμως να αξιοποιηθούν οι δυνατότητες ενός τέτοιου λογισμικού, είναι απαραίτητος ο σχεδιασμός κατάλληλων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων. Μέσω των δραστηριοτήτων αυτών, οι μαθητές παροτρύνονται να συνεργαστούν για να επεξεργαστούν τα δεδομένα τους, να συνθέσουν τα συμπεράσματα τους και να τα χρησιμοποιήσουν για να οδηγηθούν στην απάντηση των ερωτημάτων που τίθενται. Καθ' όλη δε τη διάρκεια της ερευνητικής διαδικασίας και προκειμένου να εκθέσουν τις απόψεις τους στα άλλα μέλη της ομάδας αναγκάζονται να μάθουν να επιχειρηματολογούν, χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν σωστότερα την απόδοση των μαθηματικών εννοιών για να γίνονται αντιληπτοί (Cobb and Yackel, 1996). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα και την αλλαγή του ρόλου του καθηγητή, ο οποίος γίνεται συνερευνητής με αυξημένες ευθύνες σε ότι αφορά το στήσιμο, την υποστήριξη και την αναπροσαρμογή της εκπαιδευτικής διαδικασίας (Mercer and Fisher, 1992).

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι για να μετατραπούν οι σχολικές τάξεις την ώρα των μαθηματικών σε χώρους έρευνας, πειραματισμού και οικοδόμησης της γνώσης, η δημιουργία κατάλληλων σεναρίων διδακτικής παρέμβασης από τους εκπαιδευτικούς δεν είναι μόνο ικανή αλλά και αναγκαία συνθήκη για την αξιοποίηση των ΤΠΕ και πιο συγκεκριμένα την αξιοποίηση τέτοιων προγραμμάτων μοντελοποίησης.

Στην ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα, οι παραπάνω τάσεις σε σχέση με την διαδικασία απόκτησης της μαθηματικής γνώσης απεικονίζονται στους 9 άξονες γενικών στόχων διδασκαλίας μαθηματικών (Δ.Ε.Π.Σ Μαθηματικών, 2002). Συγκεκριμένα βασικός άξονας γύρω από τον οποίο θα πρέπει να οργανωθεί η διδασκαλία των βασικών μαθηματικών εννοιών είναι η *ανάπτυξη της ικανότητας για επίλυση προβλημάτων* (άξονας 4). Άλλοι βασικοί στόχοι είναι: η *απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων* (άξονας 1), η *καλλιέργεια μαθηματικής γλώσσας ως μέσο επικοινωνίας* (άξονας 2), η *κατανόηση της δομής των μαθηματικών* (άξονας 3), η *ανάδειξη της εφαρμοσιμότητας και πρακτικής χρήσης των μαθηματικών* (άξονας 5), η *εξοικείωση με την διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία* (άξονας 6), η *ανάδειξη της δυναμικής διάστασης της μαθηματικής επιστήμης* (άξονας 7), η *καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα μαθηματικά* (άξονας 8) και η *αξιοποίηση των νέων τεχνολογιών* (άξονας 9).

Όλοι οι παραπάνω στόχοι αποτελούν και το βασικό πλαίσιο σχεδιασμού των σεναρίων που πραγματεύεται το παρόν άρθρο.

Είναι αξιοσημείωτο ότι έρευνες που αφορούν στην ελληνική σχολική πραγματικότητα σε σχέση με την αξιοποίηση των ΤΠΕ ως εργαλείο μάθησης και σκέψης (άξονας 9), έχουν αποδείξει ότι η χρήση των ΤΠΕ μπορεί:

- να προκαλέσει την αύξηση του ενδιαφέροντος τόσο για την μαθησιακή διαδικασία όσο και για τα Μαθηματικά ως επιστήμη
- να ενισχύσει την ενεργό συμμετοχή των μαθητών στην μαθησιακή διαδικασία και ιδιαίτερα των μαθητών που συνήθως είναι αδιάφοροι προς αυτή
- να συμβάλει στην αύξηση του βαθμού κατανόησης των μαθηματικών εννοιών και στην επίτευξη του προσδοκώμενου μαθησιακού αποτελέσματος. (Kyriazis & Korres, 2002)

Παρόλα αυτά, όσον αφορά, στη χρήση μαθηματικών εργαλείων (π.χ. μαθηματικών μοντέλων και μεθόδων) για τη λύση προβλημάτων εντός και εκτός του μαθηματικού περιβάλλοντος και στο σχεδιασμό και την επεξεργασία μαθηματικών μοντέλων (άξονας 5), σημειώνεται η έλλειψη σαφούς ανάδειξης της έννοιας του μοντέλου στη διδασκαλία των θετικών επιστημών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση (Φεσάκης κ.ά, 2001). Τα παρακάτω σενάρια διδακτικής παρέμβασης αποτελούν μια πρώτη προσέγγιση κάλυψης αυτής της αναγκαιότητας.

ΤΑ ΣΕΝΑΡΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Θεωρητικό πλαίσιο

Στόχος της προτεινόμενων σεναρίων διδακτικής παρέμβασης, είναι η παιδαγωγική αναζήτηση πολλαπλών και εναλλακτικών προσεγγίσεων της έννοιας της μεταβλητής και ο συσχετισμός της με της έννοιες της συνάρτησης, της ακολουθίας και του ορίου. Ο λόγος που επιλέχθηκε η συγκεκριμένη έννοια είναι διπλός: αφ' ενός η έννοια αυτή κατανοήσιμη και κεντρική στα μαθηματικά ως μια σημαντική συνιστώσα για την κατανόηση της φορμαλιστικής και μη διάστασής τους και αφ' ετέρου παρουσιάζει δυσκολίες γνωστικής αλλά και επιστημολογικής φύσης, οι οποίες καταγράφονται στη διεθνή βιβλιογραφία (Herscovics, 1994, Wagner, 1983) αλλά και προκύπτουν από τη διδακτική πρακτική κατά τη διδασκαλία της.

Το πρόγραμμα Modellus, που χρησιμοποιήθηκε για την υλοποίηση των σεναρίων αυτών, αποτελεί όχι μόνο ένα λογισμικό για την κατασκευή μοντέλων με τη χρήση μαθηματικών αλλά και ένα εργαλείο για την κατασκευή και διερεύνηση μαθηματικών μοντέλων με τη μορφή παρουσιάσεων, γραφημάτων και πινάκων τιμών, το οποίο μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να πειραματίζονται προκειμένου να κατανοήσουν το μαθηματικό υπόβαθρο και τις πολλές αναπαραστάσεις ενός μοντέλου.

Η επιλογή του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού λογισμικού, με βάση το οποίο οικοδομήθηκαν τα σενάρια αυτά, έγινε με κριτήρια την αξιολόγησή του από το Π.Ι. ως κατάλληλο για την εισαγωγή του στην εκπαιδευτική διαδικασία, τη διαθεσιμότητά του στο εκπαιδευτικό σύστημα και τις δυνατότητές του στην κάλυψη των αναγκών διδασκαλίας των συγκεκριμένων σεναρίων.

Τα 9 σενάρια διδακτικής παρέμβασης που προτείνουμε, βασίζονται στην χρήση της καθοδηγούμενης ανακαλυπτικής μάθησης με την χρήση υπολογιστή, μια προσέγγιση που βασίζεται στις απόψεις του Bruner για την ανακαλυπτική μάθηση και τις αρχές του δομητισμού (Ράπτης & Ράπτη, 2001). Κατά το σχεδιασμό των δραστηριοτήτων προσπαθήσαμε: Να δώσουμε έμφαση κυρίως στη διαδικασία (σύλληψη, οργάνωση και τεκμηρίωση) μέσω της οποίας φθάνουμε σε ένα αποτέλεσμα και όχι τόσο στο τελικό προϊόν της μαθηματικής δημιουργίας, να επιτρέψουμε (μέσω

της διατύπωσης) την εμπλοκή, εφόσον είναι δυνατόν, του συνόλου των μαθητών της τάξης, να δώσουμε υψηλό βαθμό αυτενέργειας και πρωτοβουλία, να ενθαρρύνουμε τη συνεργατικότητα και την ομαδική εργασία, να προτρέψουμε το νοητικό ανταγωνισμό, να δώσουμε έμφαση στη διατύπωση με σαφήνεια, λιτότητα και ακρίβεια καθώς και να ενθαρρύνουμε την επεξεργασία ενός προβλήματος σε τρία πλαίσια: γεωμετρικό μοντέλο- γραφικές αναπαραστάσεις, αλγεβρικό μοντέλο- αλγεβρικοί υπολογισμοί και τύποι, φυσικό μοντέλο-παρουσίαση.

Σε κάθε περίπτωση οι μαθητές εμπλέκονται με τις συγκεκριμένες δραστηριότητες που παρουσιάζονται μέσα από τα « φύλλα εργασίας», τα οποία περιέχουν στόχους διδασκαλίας και ερωτήματα για τους μαθητές, ώστε να τους παροτρύνουν να παρατηρήσουν, να προβλέψουν, να συγκρίνουν, να ελέγξουν και να επιβεβαιώσουν τις προβλέψεις τους. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν για να εφαρμοστούν σε εργαστήριο υπολογιστών όπου οι μαθητές δουλεύουν σε ομάδες των 2-3 ατόμων. Σημειώνεται ότι τα επιλεγμένα κατά περίπτωση φύλλα εργασίας δίνονται στους μαθητές τυπωμένα πριν ξεκινήσουν τις δραστηριότητες. Αποτελούν δε, ενδεικτικό παράδειγμα για αντίστοιχες δραστηριότητες στους επιμέρους γνωστικούς άξονες: έννοια της μεταβλητής (στ' δημοτικού -α' γυμνασίου), έννοια της συνάρτησης (β' γυμνασίου), συνάρτηση $\psi = \alpha\chi$ (β'-γ' γυμνασίου), συνάρτηση $\psi = \alpha\chi + \beta$ (β'-γ' γυμνασίου), έννοια συνεχούς και διακριτής μεταβλητής (α' λυκείου), έννοια της μεταβολής στην ακολουθία (β' λυκείου), έννοια του ορίου (γ' λυκείου).

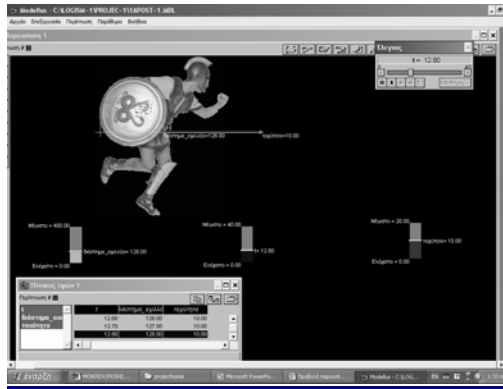
Λαμβάνοντας υπόψη την αξία της ιστορίας των μαθηματικών στην μαθηματική εκπαίδευση (Freudental, 1981), πήραμε ως αφορμή το παράδοξο του Ελεάτη φιλοσόφου Ζήνωνα και προσπαθήσαμε να κάνουμε μια σταδιακή προσέγγιση των εννοιών που εμπλέκονται στην κίνηση του Αχιλλέα και της χελώνας, αρχίζοντας από την έννοια της μεταβλητής, για να καταλήξουμε μέσα από τις έννοιες της συνάρτησης, της ακολουθίας, του συνεχούς και του διακριτού, στην έννοια του ορίου.

Παρουσίαση Των σεναρίων διδακτικών παρεμβάσεων

Σενάρια 1-2: Η έννοια της μεταβλητής (στ' δημοτικού- α' γυμνασίου)

Στο πρώτο σενάριο το σκηνικό (σχήμα 1) περιλαμβάνει το αντικείμενο « Αχιλλέας», το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα., την τιμή της οποίας μέσα οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να μεταβάλλουν. Σκοπός του σεναρίου είναι η προσέγγιση της έννοιας «μεταβλητή» ενώ για τις έννοιες – μεγέθη: «ταχύτητα», «διάστημα», «χρόνος» παρουσιάζονται τρεις μορφές αναπαραστάσεων: παρουσίαση, δείκτες στάθμης και πίνακας τιμών. Οι μαθητές καλούνται να συσχετίσουν πραγματικά αντικείμενα, καταστάσεις, εικόνες και αριθμούς με μαθηματικές έννοιες και ιδέες, να διακρίνουν ποια από τα μεγέθη που εμπλέκονται στην κίνηση είναι σταθερά και ποια μεταβλητά. Επίσης ερμηνεύοντας τη συμβολική μορφή τους να βγάλουν συμπεράσματα για τον τρόπο με τον οποίο τα μεγέθη συσχετίζονται (αναλογία). Τέλος καλούνται να περιγράψουν σε φυσική γλώσσα τη σχέση που συνδέει τα τρία αυτά μεγέθη, να τη μεταφράσουν στην μαθηματική γλώσσα και να τη συγκρίνουν με τη σχέση που παρουσιάζεται στο μοντέλο. (ΔΕΠΠΣ 2002, άξονας 2) Οι δυνατότητες του προγράμματος στη χρήση της φυσικής γλώσσας για την παράσταση των μεταβλητών, ενισχύουν την συνειδητοποίηση της αναγκαιότητας της χρήσης γραμμάτων για την παράσταση αριθμών και το μετασχηματισμό από τη φυσική σε

μαθηματική γλώσσα διευκολύνοντας έτσι τη σύνταξη της μαθηματικής έκφρασης της σχέσης.



Σχήμα1: Σκηνικό πρώτου σεναρίου

Οι διδακτικοί στόχοι που προσεγγίζονται είναι μεταξύ άλλων οι μαθητές:

- Να αναγνωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα ενός προβλήματος
- Να ασκηθούν στην αναγνώριση των σταθερών και των μεταβλητών μεγεθών ενός προβλήματος.
- Να μπορούν να περιγράψουν την έννοια της μεταβλητής και να αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητά της.
- Να ασκηθούν στη σύγκριση δεδομένων από διάφορες πηγές
- Να παρατηρούν μια προσομοίωση έτσι ώστε να μπορούν να την περιγράψουν με φυσική γλώσσα τις σχέσεις που την διέπουν και να τις εκφράζουν με μαθηματικό τρόπο.

Στο δεύτερο σενάριο το σκηνικό περιλαμβάνει πάλι το αντικείμενο «Αχιλλέας», το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα. Σκοπός του σεναρίου είναι ξανά η προσέγγιση της έννοιας «μεταβλητή», αυτή τη φορά όμως, ο πίνακας τιμών έχει αντικατασταθεί με γραφική αναπαράσταση. Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στα ίδια ερωτήματα, συσχετίζοντας αυτή τη φορά μαθηματικές έννοιες και ιδέες με εικόνες και διαγράμματα. Τέλος καλούνται να συγκρίνουν τα είδη των αναπαραστάσεων στις δύο δραστηριότητες.

Οι διδακτικοί στόχοι που προσεγγίζονται είναι μεταξύ άλλων οι μαθητές:

- Να αναγνωρίζουν αν υπάρχει αναλογία στη μεταβολή δύο μεγεθών
- Να αναπαριστούν γραφικά μία σχέση αναλογίας και να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι τα σημεία με συντεταγμένες τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών δύο αναλόγων ποσών βρίσκονται σε μία ημιευθεία με αρχή την αρχή των αξόνων
- Να αναγνωρίζουν και να ερμηνεύουν τα ανάλογα ποσά σε διάφορες περιοχές της ανθρώπινης δραστηριότητας
- Να μεταβαίνουν από το ένα είδος αναπαράστασης στο άλλο

- Να ερμηνεύουν μια γραφική παράσταση ή έναν πίνακα τιμών με μια μαθηματική έκφραση

Σενάρια 3-4-5: Η έννοια της συνάρτησης (β'-γ' γυμνασίου)

Στο τρίτο σενάριο χρησιμοποιώντας τα δύο προηγούμενα σκηνικά εστιάζουμε στην έκφραση του μεγέθους της απόστασης συναρτήσει του μεγέθους του χρόνου. Σκοπός του σεναρίου είναι η προσέγγιση της έννοιας «συνάρτηση» ενώ για τις έννοιες –μεγέθη: «ταχύτητα», «διάστημα», «χρόνος» παρουσιάζονται τρεις μορφές αναπαραστάσεων: παρουσίαση, γραφική αναπαράσταση και πίνακας τιμών. Στην εκπαιδευτική έρευνα στο χώρο των μαθηματικών έχει καταγραφεί η ύπαρξη λανθασμένων αντιλήψεων και δυσκολιών των μαθητών σχετικά με την έννοια της συνάρτησης και των διαφορετικών αναπαραστάσεων της. Συγκεκριμένα οι μαθητές έχουν δυσκολία στη μεταφορά πληροφορίας μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων ακόμα και σε απλές περιπτώσεις και δεν χρησιμοποιούν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, ενώ προτιμούν να χειρίζονται τη συνάρτηση μέσα από τον αλγεβρικό της τύπο, ο οποίος αποτελεί για τους περισσότερους μια ακολουθία συμβόλων. Σε αυτό το πλαίσιο η Confrey (Confrey,1992), προτείνει την προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης μέσα από σύστημα πολλαπλών αναπαραστάσεων της. Γι' αυτό το λόγο προσπαθούμε να οδηγήσουμε στον τύπο της συνάρτησης, μέσα από την συσχέτιση του πίνακα τιμών (υπολογισμοί) και της γραφικής αναπαράστασης των σημείων που παριστάνει, βασιζόμενοι στις πρότερες γνώσεις των μαθητών (σενάρια1,2).

Οι διδακτικοί στόχοι που προσεγγίζονται είναι μεταξύ άλλων, οι μαθητές:

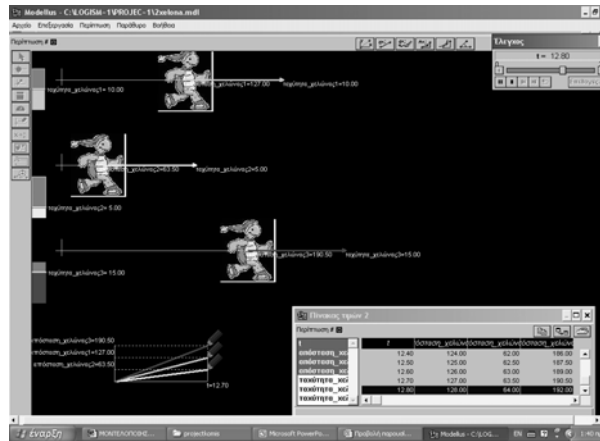
- Να μπορούν να αναγνωρίζουν την αλληλεξάρτηση δύο μεγεθών
- Να εκφράζουν μια μεταβλητή ως συνάρτηση μιας άλλης μεταβλητής
- Να εξοικειωθούν με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης

Στο τέταρτο σενάριο το σκηνικό (σχήμα 2) περιλαμβάνει τρία αντικείμενα «χελώνες», τα οποία κινούνται με σταθερές αλλά διαφορετικές ταχύτητες, τις τιμές των οποίων οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να μεταβάλλουν. Σκοπός είναι η προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης με εστίαση στην περίπτωση της μορφής $\psi = \alpha \chi$. Για τις έννοιες –μεγέθη: «ταχύτητα», «διάστημα», «χρόνος» παρουσιάζονται τρεις μορφές αναπαραστάσεων: παρουσίαση, διάγραμμα και πίνακας τιμών. Σύμφωνα με το σενάριο, ζητείται από τους μαθητές τρέχοντας το μοντέλο, και μελετώντας τις γραφικές παραστάσεις και τον πίνακα τιμών, να υπολογίσουν το διάστημα που θα έχει καλύψει κάθε χελώνα στον ίδιο χρόνο (π.χ.20sec). Οι παρατηρήσεις τους θα αποτελέσουν το έναυσμα μιας συζήτησης που αποσκοπεί στην διευκρίνιση του ρόλου του α στην συνάρτηση $\psi = \alpha \chi$. Ακολούθως καλούνται να ερμηνεύσουν τις ομοιότητες και τις διαφορές στις τρεις γραφικές παραστάσεις. Τέλος ζητείται από το μαθητή να προβλέψει «Στην κίνηση ποιας χελώνας αντιστοιχεί η γραφική παράσταση που σχηματίζει τη μεγαλύτερη γωνία με τον οριζόντιο άξονα» και να πειραματιστεί ώστε να εξοικειωθεί με το ρόλο του α στην γραφική αναπαράσταση της εξίσωσης ευθείας .

Οι διδακτικοί στόχοι που προσεγγίζονται είναι μεταξύ άλλων οι μαθητές

- Να κατανοήσουν την έννοια της απόστασης ως συνάρτηση της ταχύτητας στην εξίσωση $\psi = \alpha \chi$
- Να διαπιστώσουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha \chi$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση α

- Να εξοικειωθούν με την έννοια της κλίσης της ευθείας



Σχήμα 2: Σκηνικό τέταρτου σεναρίου

Στο πέμπτο σενάριο το σκηνικό περιλαμβάνει δύο αντικείμενα «χελώνες», τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση μεταξύ τους (π.χ. 150m). Σκοπός είναι η προσέγγιση της έννοιας της συνάρτησης με εστίαση στην περίπτωση της μορφής $\psi = \alpha\chi + \beta$. Για τις έννοιες – μεγέθη: «ταχύτητα», «διάστημα», «χρόνος» παρουσιάζονται τρεις μορφές αναπαράστασης: παρουσίαση, διάγραμμα και πίνακας τιμών. Ζητώντας από το μαθητή να προβλέψει χωρίς άλλα στοιχεία ποια χελώνα θα έχει προηγηθεί μετά από συγκεκριμένο χρόνο, το ερώτημα αποβλέπει στην απόκτηση κριτικού τρόπου σκέψης (άξονας 1) καθώς δίνει τη δυνατότητα στο μαθητή να προβληματισθεί γύρω από το ρόλο των παραμέτρων α , β στην συνάρτηση $\psi = \alpha\chi + \beta$. Επιλέγοντας την περίπτωση που οι χελώνες έχουν τις ίδιες ταχύτητες, οι μαθητές μέσα από την παρατήρηση των γραφικών παραστάσεων $\psi = \alpha\chi$ και $\psi = \alpha\chi + \beta$ καλούνται μέσω της εμπειρικής προσέγγισης (εξερεύνηση, παρατήρηση, διατύπωση και έλεγχο υποθέσεων και ενδεχομένως παραγωγικό συλλογισμό) (άξονας 6) να συμπεράνουν την παράλληλη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\psi = \alpha\chi$ κατά β .

Οι διδακτικοί στόχοι που προσεγγίζονται είναι μεταξύ άλλων:

- Να διαπιστώσουν ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \alpha\chi + \beta$ είναι ευθεία που δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την χρονική στιγμή 0 έχει την τιμή β
- Να ανακαλύψουν τις ομοιότητες και τις διαφορές στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\psi = \alpha\chi$ και $\psi = \alpha\chi + \beta$
- Να εξοικειωθούν με την παράλληλη μετατόπιση μιας γραφικής παράστασης.

Σενάριο 6 : Σύστημα εξισώσεων (γ' γυμνασίου)

Στο έκτο σενάριο ουσιαστικά διευρύνουμε το πέμπτο, καλώντας τον μαθητή να πειραματιστεί όχι μόνο στην περίπτωση που οι χελώνες έχουν την ίδια ταχύτητα αλλά σε όλες τις δυνατές περιπτώσεις. Σκοπός είναι η προσέγγιση της έννοιας «σύστημα». Για τις έννοιες – μεγέθη: «ταχύτητα», «διάστημα», «χρόνος» παρουσιάζονται τρεις μορφές αναπαράστασης: παρουσίαση, διάγραμμα και πίνακας τιμών. Οι μαθητές

καλούνται να προβλέψουν σε ποια περίπτωση οι χελώνες θα συναντηθούν και πειραματιζόμενοι να τεκμηριώσουν την απάντησή τους. Επιδιώκεται κατ' αυτόν τον τρόπο να ασκηθούν στην επίλυση προβλημάτων που προέρχονται από τα μαθηματικά (εξισώσεις α' βαθμού και γραμμικά συστήματα), ώστε να δοθεί η ευκαιρία να παρουσιαστούν διάφορες ευρετικές, στρατηγικές επίλυσης προβλήματος και να οδηγηθούν σε συμπεράσματα όπως το ότι «αν η χελώνα που έπεται έχει μεγαλύτερη ταχύτητα, τότε οι χελώνες θα συναντηθούν».

Σενάριο 7 : Η έννοια συνεχούς και διακριτής μεταβλητής (α' λυκείου)

Στο έβδομο σενάριο το σκηνικό (σχήμα 3) περιλαμβάνει δύο αντικείμενα: τον «Αχιλλέα» και τη «χελώνα». Η «χελώνα» προηγείται του Αχιλλέα κατά 150 μέτρα. Σκοπός είναι η προσέγγιση των εννοιών «συνεχές» και «διακριτό» με εστίαση στις τιμές που μπορεί να πάρει μια μεταβλητή. Για τις έννοιες –μεγέθη: «ταχύτητα», «διάστημα», «χρόνος» παρουσιάζονται δύο μορφές αναπαράστασης: παρουσίαση και γραφική παράσταση. Οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν στο ερώτημα «αν ο Αχιλλέας και η χελώνα θα συναντηθούν». Έχουν την δυνατότητα να πειραματιστούν για διαφορετικές ταχύτητες της χελώνας (αλλάζοντας τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος). Διευκρινίζεται δε ότι το μοντέλο θα σταματήσει να «τρέχει», αν και όταν ο Αχιλλέας και η χελώνα συναντηθούν, πράγμα που συμβαίνει όταν η χελώνα τρέχει με την μισή ταχύτητα από τον Αχιλλέα. Στους μαθητές τίθεται ο προβληματισμός «γιατί δεν συμβαίνει το ίδιο, όταν η χελώνα τρέχει με ταχύτητα ίση με το ένα δέκατο της ταχύτητας του Αχιλλέα». Για την επίλυση του προβλήματος αυτού, οι μαθητές καλούνται να κάνουν διαδοχικές εστιάσεις στο «σημείο τομής» των γραφικών παραστάσεων και να συμπεράνουν το πρόβλημα που ανακύπτει λόγω των διακριτών τιμών που παίρνει η μεταβλητή του χρόνου.

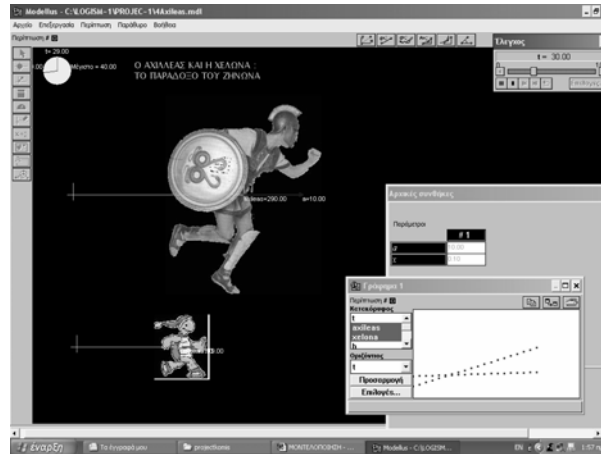
Μέσα από την συγκεκριμένη δραστηριότητα επιδιώκεται οι μαθητές να κρίνουν τα όρια και τις δυνατότητες του προγράμματος καθώς και να κάνουν σαφή διάκριση ανάμεσα στο μοντέλο που έχει ενσωματωθεί στο πρόγραμμα και στην ίδια την πραγματικότητα, ώστε να ελεγχθεί το κατά πόσο οι μεταβλητές μιας διαδικασίας μπορούν εύκολα, ισότιμα και ανεξάρτητα να ελεγχθούν (Δημητρακοπούλου, 1999). Ένας επιπλέον στόχος, είναι οι μαθητές να αντιληφθούν ότι ο πειραματισμός δεν μπορεί να υποκαταστήσει την απόδειξη, όπως συμβαίνει στις φυσικές επιστήμες, αλλά πρέπει να οριοθετηθεί στο σχηματισμό, μιας νοητικής λειτουργίας

.Οι διδακτικοί στόχοι που προσεγγίζονται είναι μεταξύ άλλων, οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια του συνεχούς και του διακριτού
- Να εξοικειωθούν με την επεξεργασία μαθηματικών μοντέλων για την αντιμετώπιση προβλημάτων και να συνειδητοποιήσουν τη δύναμη και τα όριά τους (άξονας β)

Σενάριο 8: Η έννοια της ακολουθίας (β' λυκείου)

Στο όγδοο σενάριο το σκηνικό (σχήμα 3) περιλαμβάνει πάλι τα δύο γνωστά αντικείμενα τον «Αχιλλέα» και τη «χελώνα». Η χελώνα προηγείται του Αχιλλέα κατά



Σχήμα 3: Σκηνικό όγδοου σεναρίου

150 μέτρα. Σκοπός του σεναρίου είναι όχι μόνο η προσέγγιση της έννοιας της ακολουθίας ως συνάρτηση με πεδίο ορισμού διακριτές τιμές, αλλά και η εξοικείωση των μαθητών με την έννοια της αναδρομής. Για τις έννοιες – μεγέθη: «ταχύτητα», «διάστημα», «χρόνος» παρουσιάζονται δύο μορφές αναπαραστάσεων: παρουσίαση και μοντέλο. Αυτή τη φορά παρουσιάζεται αρχικά στους μαθητές το παράδοξο του Ζήνωνα και οι μαθητές καλούνται να διατυπώσουν σε φυσική γλώσσα αλλά με μαθηματικό τρόπο α) τη θέση που φτάνει κάθε φορά ο Αχιλλέας σε σχέση με τη προηγούμενη του θέση και β) τη θέση που φτάνει κάθε φορά η χελώνα σε σχέση με τη προηγούμενη της θέση. Καλούνται τέλος να συγκρίνουν την απάντησή τους με το νέο μοντέλο που τους παρουσιάζεται. Βασική επιδίωξη είναι να επισημανθούν «λάθη» και να αξιολογηθούν κατάλληλα (άξονας δ).

Οι διδακτικοί στόχοι που προσεγγίζονται είναι μεταξύ άλλων, οι μαθητές:

- Να κατανοήσουν την έννοια της ακολουθίας ως συνάρτηση που παίρνει διακριτές τιμές
 - Να μπορούν να βρύνουν τους όρους της ακολουθίας από τον αναδρομικό τύπο
- Σενάριο 9: Η έννοια του ορίου (γ' λυκείου)**

Στο ένατο σενάριο το σκηνικό περιλαμβάνει πάλι τα δύο γνωστά αντικείμενα τον «Αχιλλέα» και τη «χελώνα». Η χελώνα, όπως και προηγούμενα, προηγείται του Αχιλλέα κατά 150 μέτρα. Σκοπός είναι η προσέγγιση της έννοιας της ορίου. Για τις έννοιες – μεγέθη: «ταχύτητα», «διάστημα», «χρόνος» παρουσιάζονται τρεις μορφές αναπαραστάσεων: παρουσίαση, γράφημα και πίνακας τιμών. Αυτή τη φορά, δεδομένου του προηγούμενου σεναρίου, οι μαθητές καλούνται παρατηρώντας τον πίνακα τιμών και την γραφική παράσταση του νέου μοντέλου, να το σχετίσουν με το προηγούμενο και να επιβεβαιώσουν ή να διαψεύσουν το παράδοξο του Ζήνωνα. Μέσα από τον προβληματισμό αυτό επιδιώκουμε να διευκολυνθούν οι γνωστικές αλληλεπιδράσεις και το παράδοξο, να προσφέρει ευκαιρίες για ανταλλαγή ιδεών, υπεράσπιση και αντίκρουση ισχυρισμών καθώς και ελεύθερη διατύπωση απόψεων.

Οι διδακτικοί στόχοι που προσεγγίζονται είναι μεταξύ άλλων οι μαθητές:

- Να έρθουν σε επαφή με την έννοια του ορίου μέσω της επ' άπειρον μειούμενης απόστασης της χελώνας και του Αχιλλέα.
- Να ενταχθούν σε διαδικασίες προσωπικού αναστοχασμού, σε σχέση με την δυναμική διάσταση της μαθηματικής επιστήμης, της εξέλιξη της και των σύγχρονων εναλλακτικών τρόπων χειρισμού των αριθμητικών τεχνικών (άξονας7).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η μάθηση κινείται σε διαδοχικά επίπεδα αφαίρεσης. Παριστάνοντας τις έννοιες με σύμβολα τις ανακαλούμε με τη μορφή νοητικών αντικειμένων, τα οποία διαπραγματευόμαστε με διάφορους τρόπους. Με τον ίδιο τρόπο ομαδοποιούμε έννοιες από μια κοινή τους ιδιότητα, σχηματίζοντας έννοιες ανωτέρας τάξεως. Σκοπός μας είναι, ως εκπαιδευτικοί να δημιουργήσουμε τα κατάλληλα εργαλεία που θα παρέχουν στους μαθητές μας τις σκαλωσιές (scaffolding) και θα τους βοηθήσουν να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ του συγκεκριμένου και του αφηρημένου. Η δημιουργία του συγκεκριμένου υλικού, μοντέλων, σχημάτων, διαγραμμάτων, συμβόλων προσπάθησε να εξυπηρετήσει αυτό το σκοπό. Το επόμενο στάδιο που είναι ο εμπλουτισμός και η αξιολόγηση του υλικού αυτού, θα μας αποδείξει αν ο σκοπός αυτός μπορεί να επιτευχθεί.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε ιδιαίτερα τον κ. Α. Ράπτη και την κ. Α.Ράπτη, καθώς και τον κ. Β. Κόμη, τον κ. Π. Πολίτη και την κ. Α. Δημητρακοπούλου για την πολύτιμη καθοδήγηση τους κατά τις διάφορες φάσεις δημιουργίας του υλικού αυτού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Carson, S. (2000), Modelling and Models in Advancing Physics. *Workshop at the ASE Meeting*, January 2000, Leeds
2. Chevallier, M. (2000), Εναλλακτικές Μέθοδοι Διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Καλαβάση & Μειμάρης (εκδ.) *Θέματα Διδακτικής ΜαθηματικώνV-Διεπιστημονική προσέγγιση των Μαθηματικών και της Διδασκαλίας τους*, 225-240, Αθήνα, εκδόσεις Gutenberg.
3. Cobb, P.& Yackel, E.(1996), Constructivist, Emergent and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research, *Journal of Education Psychology*, (31), 175-190
4. Confrey, J.(1992), Splitting similarity and the rate of change: New approaches to multiplication and exponential functions In G.Harel and J. Confrey (Eds)*The development of multiplicative reasoning in the learning of Mathematics*, NY Suny Press, Albany
5. Freudental, H.(1981), Should a mathematics teacher know something about the history of Mathematics? *For the Learning of Mathematics* 2(1)30-33
6. Herscovics, N.& Linchevski, L.(1994), A cognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78
7. Keitel, C. (2000), Διδασκαλία και Μάθηση των Μαθηματικών σε Διεπιστημονικό πλαίσιο: Τα Μαθηματικά και η Κοινωνική Πρακτική τους Μέσα στην Τάξη στο

- Καλαβάσης & Μειμάρης (εκδ) *Θέματα Διδακτικής ΜαθηματικώνV- Διεπιστημονική προσέγγιση των Μαθηματικών και της Διδασκαλίας τους*», 157-189, Αθήνα, εκδόσεις Gutenberg
8. Kyriazis, A. & Korres, K.(2002), Teaching linear functions in Junior High School with the use of Computers *Πρακτικά 3^ο Πανελληνίου Συνεδρίου “ Οι τεχνολογίες της Πληροφορίας και της επικοινωνίας στην εκπαίδευση”*, τ.Β, 255-264, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος, εκδόσεις Καστανιώτη.
 9. Mercer, N.&Fisher, E. (1992), How do teachers help children to learn? An analysis of teachers’ interventions in computer based activities *Learning and Instruction* Vol.2, 339-355
 10. Raj, L.& Bukey Z. (2002), The Use Of Online Interactive Models And Simulation In Assisting Students’ Development Of Mathematical Concepts *Proceedings of Second International Conference on the Teaching of Mathematics*, University of Crete, Hersonissos Crete, Greece
 11. Teodoro V. (1997), Modellus: Using a Computational Tool to Change The Teaching and Learning of Mathematics and Science, *UNESCO Colloquium “New Technologies and the Role of the Teacher”*, Open University, Milton Keynes, UK, 26-29 April 1997
 12. Wagner S. (1983), What the variables are? *Mathematics Teacher*, October 1983
 13. Δημητρακοπούλου, Α(1999), Οι εκπαιδευτικές εφαρμογές των τεχνολογιών της πληροφορίας στη διδασκαλία των φυσικών επιστημών – Τι προσφέρουν και πως τις αξιοποιούμε ; *Επιθεώρηση Φυσικής* 3^η περίοδος , Vol .Η , No 30, Άνοιξη 1999
 14. Κόμης, Β., Δημητρακοπούλου, Α., Σακονίδης, Χ., Πολίτης, Π., Αβούρης, Ν. (2002), Το περιβάλλον μοντελοποίησης ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ 2.0: Διδακτικές Δραστηριότητες στα Μαθηματικά και στις Φυσικές Επιστήμες *Πρακτικά 3^ο Πανελληνίου Συνεδρίου “ Οι τεχνολογίες της Πληροφορίας και της επικοινωνίας στην εκπαίδευση”*, τ.Β, 597-600, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Ρόδος, εκδόσεις Καστανιώτη.
 15. Μειμάρης, Μ., Αναπολιτάνος, Δ., Νεγρεπόντης, Σ., Dumont, B.,Touchard, J.B., Fort, M.(1997), Νέες Τεχνολογίες και Μαθηματικά: Μεταξύ αυστηρότητας και εποπτείας (Στρογγυλό τραπέζι) στο Καλαβάσης & Μειμάρης (εκδ) *Θέματα Διδακτικής ΜαθηματικώνIII- Διδακτική Μαθηματικών και Νέες Τεχνολογίες*, 417-442, Αθήνα, εκδόσεις Gutenberg
 16. Ράπτης Α. & Ράπτη Α. (2001), *Μάθηση και Διδασκαλία στην εποχή της πληροφορίας*, τ. Α΄, Αθήνα,. 81-91,114-115
 17. ΥΠΕΠΘ-Π.Ι. (2002), *Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης*, 1-7, 226-233, 960-967, 1005-1010, 1028-1029, 1034, 1050-1054, 1078-1079, 1084-1086, 1100-1107, Αθήνα
 18. Φεσάκης, Γ., Δημητρακοπούλου, Α., Καλαβάσης, Φ.(2001), Δραστηριότητες μοντελοποίησης με χρήση Η/Υ στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση: Διερεύνηση και πειραματική εφαρμογή σε μαθητές Γ΄ Λυκείου *Πρακτικά Πανελληνίου Συνεδρίου Νέες Τεχνολογίες στην Εκπαίδευση και στην εκπαίδευση από Απόσταση*, 673-688, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Ρέθυμνο, εκδ Ατραπός