Τα Προγράμματα “Δυναμικής” Γεωμετρίας και η Χρήση τους στη Διδασκαλία της Άλγεβρας και της Ανάλυσης στη Μέση Εκπαίδευση

Αριστοτέλης Μακρίδης
Μαθηματικός, Επιμορφωτής των Τ.Π.Ε
Αποσπασμένος στην ενδοσχολική επιμόρφωση, Υ.Π.Ε.Π.Θ
Α΄Διεύθυνση Θεσσαλονίκης
amakrid@de.sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ:
Στα πλαίσια του επιμορφωτικού προγράμματος (Τεχνολογίες της πληροφορίας και της επικοινωνίας) και της επιμόρφωσης Μαθηματικών Λυκείου που κάνω στην Θεσσαλονίκη το σχολικό έτος 2001-2002 χρησιμοποίησα τις δυνατότητες που έχει το Sketchpad (εμφάνιση αξόνων, συντεταγμένων, αποτύπωση σημείου με ορισμένες συντεταγμένες, κατασκευή γεωμετρικού τόπου) για την κατασκευή γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων και εμφάνιση πολλών χαρακτηριστικών τους. Υπάρχουν έννοιες της ανάλυσης που γίνονται ελάχιστα κατανοητές από τους μαθητές/τριες γιατί η "οπτικοποίηση" τους, που επιχειρείται στα σχήματα του βιβλίου, είναι στατική ενώ αυτές περιέχουν το στοιχείο της μεταβολής άρα και της κίνησης. Μία από τις πλέον χαρακτηριστικές περιπτώσεις είναι ο (ε-ορισμός του ορίου) που εξαιτίας της αδυναμίας κατανόησης του από τους μαθητές δεν συμπεριλαμβάνεται πλέον στην διδακτέα ύλη. Ένα άλλο σημείο που μπορεί να διδαχθεί με επιτυχία χρησιμοποιώντας τα προγράμματα που έχουν τη δυνατότητα να κάνουν γραφική παράσταση την οποία να διατρέχουν σημεία είναι αυτό της εφαπτομένης. Μπορούμε να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση συνάρτησης και θεωρώντας σημείο κινούμενο επάνω της να προσεγγίζει άλλο σταθερό , η χορδή που ενώνει τα δύο σημεία παίρνει μία οριακή θέση (τη θέση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σταθερό σημείο). Άλλες δραστηριότητες με το Sketchpad μπορούν να δείξουν ότι ενώ η εφαπτομένη δευτέρου βαθμού συναρτήσεων έχει μόνον ένα κοινό σημείο με τη γραφική της παράσταση δε συμβαίνει κάτι αντίστοιχο σε όλες τις γραφικές παραστάσεις. Μία επίσης ενδιαφέρουσα ιδιότητα του Sketchpad είναι η δυνατότητα του να κάνει το γράφημα σχέσης που είναι η αντίστροφη συνάρτησης, δυνατότητα που δεν έχουν άλλα προγράμματα γραφικών παραστάσεων. Με χρήση της δυνατότητας στοιχειώδη προγραμματισμού (εντολές βρόγχου) έχουμε την δυνατότητα να δημιουργήσουμε δραστηριότητα (εγγεγραμμένη - περιγεγραμμένη πολυγωνική γραμμή) που να βοηθήσει στη διδασκαλία του ορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *κινητικότητα σχήματος, δυναμική Γεωμετρία, Γράφημα, σχέση, Γραφική παράσταση, Sketchpad , αρχεία gsp*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Είναι γνωστό σε όσους χρησιμοποιούν τα «γεωμετρικά προγράμματα» Cabri και Sketchpad ότι η συνηθέστερη χρήση τους αφορά την Γεωμετρία (όπως και οι κατασκευαστές τους ισχυρίζονται).

Στα πλαίσια της ενδοσχολικής επιμόρφωσης εκπαιδευτικών το σχολικό έτος 2001-02 στην Θεσσαλονίκη έγινε πετυχημένη (εξίσου με τη γεωμετρία) χρήση τους και στην Ανάλυση αλλά και στην κατασκευή γραφικών παραστάσεων.

Μέσα από προτεινόμενες δραστηριότητες (κυρίως με το Sketchpad) έγινε δυνατή η «οπτικοποίηση» πολλών εννοιών που παρουσιάζουν δυσκολίες στην πλήρη κατανόηση τους από τους μαθητές.

Έτσι το Sketchpad χρησιμοποιήθηκε στα παρακάτω θέματα τα οποία θα παρουσιάσω αναλυτικά στη συνέχεια:

1. Γραφική παράσταση πολυωνυμικής συνάρτησης έως και 5ου βαθμού με μεταβλητούς συντελεστές
2. Εμφάνιση της εφαπτομένης γραφικής παράστασης με μεταβλητούς συντελεστές σε τυχαίο (μεταβαλλόμενο) σημείο της .
3. Γραφική παράσταση συνάρτησης πολλαπλού τύπου συνεχούς ή ασυνεχούς και με δυνατότητα εμφάνισης των ημιεφαπτομένων της .
4. Ανίχνευση των κατακόρυφων και πλάγιων ασύμπτωτων στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
5. Υπολογισμός του Ορισμένου ολοκληρώματος με τον ορισμό του.
6. Μελέτη συνάρτησης με εμφάνιση των γραφικών παραστάσεων της α΄και β΄παραγώγου της.

Νομίζω ότι από τις ιδέες αυτές μπορούν να ξεκινήσουν και να γίνουν άπειρες δραστηριότητες με τα προγράμματα κινητικής γεωμετρίας που να αφορούν στην Ανάλυση και στη στοιχειώδη Άλγεβρα.

Για τις δραστηριότητες που προτείνονται υπάρχουν και τα αντίστοιχα αρχεία *.gsp του Sketchpad.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Σύντομη περιγραφή της κατασκευής του αρχείου *.gsp (Sketchpad)

Χρησιμοποιώ σημεία ή ευθύγραμμα τμήματα (τα άκρα τους και τις συντεταγμένες τους) για να έχω τη δυνατότητα μεταβολής των συντελεστών της συνάρτησης.

Οι συντελεστές που θα χρησιμοποιηθούν είναι κατά έναν παραπάνω από τον βαθμό της συνάρτησης.

Παίρνω τυχαίο σημείο στον άξονα ΧΧ΄ και από την τετμημένη του υπολογίζω την τιμή της συνάρτησης με χρήση των παραπάνω μεταβλητών συντελεστών. Κάνουμε αποτύπωση του (χ,f(χ)) και κατόπιν κατασκευή του γεωμετρικού τόπου.

Με επανάληψη της διαδικασίας για το σημείο (f(x),x) μπορώ να κατασκευάσω τη γραφική παράσταση της αντίστροφης της σχέσης.

Προτεινόμενες διδακτικές χρήσεις

Με το παραπάνω αρχείο δραστηριότητα του Sketchpad μπορούμε να παρουσιάσουμε στους μαθητές μας :

Πώς μηδενίζοντας ή μεταβάλλοντας ορισμένους συντελεστές μπορούμε να πάρουμε διάφορες μορφές της γραφικής παράστασης της συνάρτησης.

1. Να εξετάσουμε τι γίνεται με τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και της αντίστροφής της σχέσης
2. Να διαπιστώσουμε ότι η αντίστροφη σχέση δεν είναι πάντα συνάρτηση αλλά και ποία είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων συνάρτησης αντίστροφης σχέσης.
3. Η γραφική αυτή παράσταση θα χρησιμοποιηθεί και σαν αφετηρία για την κατασκευή άλλων δραστηριοτήτων.

ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΈΝΗΣ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Σύντομη περιγραφή της κατασκευής του αρχείου *.gsp

Στο τυχαίο σημείο που χρησιμοποιήσαμε για να κάνουμε τη γραφική παράσταση της προηγούμενης δραστηριότητας φέρω την παράλληλη ευθεία ε προς τον άξονα ΧΧ΄.
Υπολογίζω την τιμή της παραγώγου στο σημείο αυτό και με την συνάρτηση Tan^{-1} την γωνία φ που σχηματίζει η εφαπτομένη στο σημείο αυτό με τον άξονα ΧΧ΄.
Κάνω στροφή της ευθείας ε κατά την γωνία φ.

Διδακτικές χρήσεις

1. Μπορούμε να δούμε ότι η εφαπτομένη τοπικά μόνον έχει ένα κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της συνάρτησης (σε συναρτήσεις διαφορετικού του β΄βαθμού) μπορεί δηλαδή να τέμνει την γραφική παράσταση και σε σημεία διαφορετικά του σημείου επαφής.
2. Στα κοίλα της συνάρτησης η συνάρτηση του συντελεστή κλίσης της εφαπτομένης είναι αύξουσα.
3. Αντίστοιχα στα κυρτά είναι φθίνουσα.
4. Εμφανίζοντας την γραφική παράσταση της αντίστροφης σχέσης μιας συνάρτησης f μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεν είναι πάντα συνάρτηση ,ότι αν η συνάρτηση f είναι αύξουσα – φθίνουσα στο διάστημα (α,β) τότε η αντίστροφή της είναι επίσης αύξουσα –φθίνουσα αλλά στο υποδιάστημα (του δικού της πεδίου ορισμού) (f(α),f(β)) - (f(β),f(α)) .
5. Μπορούμε να δείξουμε επίσης την αλλαγή των ρόλων πεδίου ορισμού και τιμών στις συναρτήσεις f και f^{-1}.

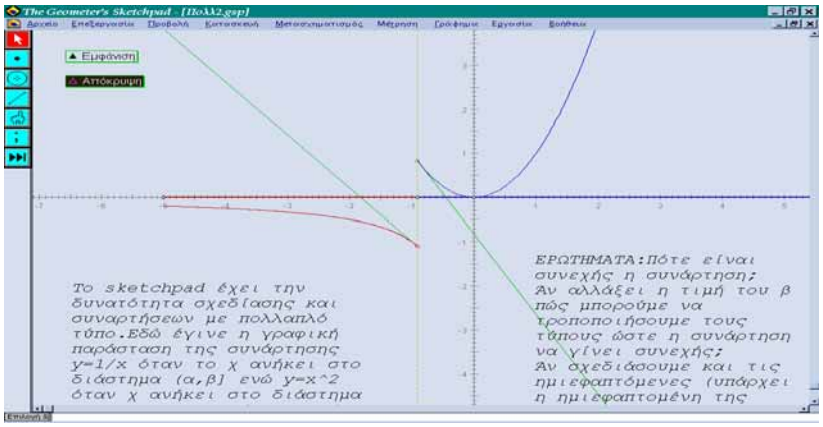
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΥ ΤΥΠΟΥ, ΗΜΙΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ

Σύντομη περιγραφή της κατασκευής του αρχείου *.gsp

Μετά την εμφάνιση του συστήματος συντεταγμένων και την απόφαση σε πόσα υποδιαστήματα θα χωρίσουμε το πεδίο ορισμού (στο αρχείο που επισυνάπτω , 2) χωρίζω το άξονα ΧΧ΄σε υποδιαστήματα με ευθύγραμμα τμήματα ή ημιευθείες .
Σε κάθε ένα από αυτά παίρνω τυχαίο σημείο με τετμημένη χ και κατασκευάζω τον γ.τόπο του (χ,f(χ)) όπου f ο τύπος της συνάρτησης που ισχύει σε αυτόν τον κλάδο.
Κατόπιν, με τον γνωστό τρόπο κατασκευής της εφαπτομένης χρησιμοποιώντας ημιευθείες κατασκευάζω τις ημιεφαπτόμενες.

Διδακτικές χρήσεις

1. Μπορούμε να βρούμε σημεία αλλαγής των τύπων ώστε σε αυτά η συνάρτηση να είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη και άλλα στα οποία οι ημιεφαπτόμενες να είναι αντικείμενες αλλά η συνάρτηση να μην είναι είναι συνεχής .Στα σημεία αυτά αν παρέμβουμε στον τύπο είναι δυνατόν να γίνει η συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη.
2. Οι κλάδοι της συνάρτησης μπορούν να ορίζονται από σχέσεις με μεταβλητούς συντελεστές οπότε θα έχουμε και δυνατότητες αλλαγή των τύπων στα υποδιαστήματα.
3. Είναι δυνατή η απεικόνιση του γραφήματος συνάρτησης με μεμονωμένα σημεία στο πεδίο τιμών της.
4. Αν οι ημιεφαπτόμενες σε ένα σημείο συμπέσουν τότε φαίνεται ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης.



Σχήμα 1

ΠΛΑΓΙΕΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

Σύντομη περιγραφή της κατασκευής του αρχείου *.gsp

Τα προγράμματα γεωμετρίας δεν έχουν βέβαια την ικανότητα να κατασκευάζουν ασύμπτωτες άμεσα μπορούμε βέβαια να υπολογίσουμε την εξίσωση της με την θεωρία και κατόπιν να την ορίσουμε ωστόσο να χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω «πειραματικό» τρόπο.

Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο χ στον ΧΧ΄και κατασκευάζουμε τα (χ-ε , f(χ-ε)) και (χ+ε,f(χ+ε)) στην γραφική της παράσταση .Τα ενώνουμε με ευθύγραμμο τμήμα για τις κατακόρυφες ασύμπτωτες ή με ευθεία για τις κατακόρυφες ,πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στα άκρα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης.

Μετακινώντας το σημείο χ στον άξονα ΧΧ΄εκεί οπού υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες εμφανίζονται μάλιστα μπορούμε να εμφανίσουμε και τον τύπο τους.

Μετακινώντας το χ στο +οο ή στο –οο έχουμε την δυνατότητα να εμφανίσουμε προσεγγιστικά και τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες.

Αν θελήσουμε τον ακριβή τύπο θα μετακινήσουμε την μονάδα του συστήματος συντεταγμένων προς το 0.

Διδακτικές χρήσεις

1. Εξηγώντας τον τρόπο κατασκευής της δραστηριότητας μπορούμε να κάνουμε φανερό ότι σε περιοχές του απείρου η γραφική παράσταση της συνάρτησης συμπεριφέρεται όπως και η ασύμπτωτη.
2. Το ίδιο συμβαίνει όταν ο χ πλησιάζει σε συγκεκριμένη τιμή ενώ ο f(χ) σε περιοχή του άπειρου.
3. Σε περιπτώσεις που δεν υπάρχουν πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες παρατηρούμε ότι καθώς το χ μετακινείται προς το άπειρο δεν σταθεροποιούνται οι συντελεστές της ευθείας,
4. Μπορούμε να δείξουμε (όχι με την έννοια της απόδειξης) ότι η ασύμπτωτη μπορεί να έχει κοινά σημεία με την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ ΑΠΌ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ

Σύντομη περιγραφή της κατασκευής του αρχείου *.gsp

Ξεκινούμε από την έτοιμη γραφική παράσταση σνάρτησης.

Παίρνω δύο σημεία Α,Β στον άξονα ΧΧ΄ και ανοίγω ένα νέο αρχείο εντολών (αρχίζω και την καταγραφή) .

Με την διαδικασία της ΑΥΞΟΜΕΙΩΣΗΣ δημιουργώ το ομοιόθετο Β΄του Β με κέντρο το Α.

Δημιουργώ το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με βάση ΑΒ΄και ύψος την ελάχιστη (μέγιστη)τιμή της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος που ορίζεται από τα ΑΒ΄(εδώ αναγκαστικά απέχουμε λίγο από τον ορισμό που απαιτεί την ελάχιστη-μέγιστη τιμή της συνάρτησης σε ολόκληρο το διάστημα –αν η συνάρτηση δεν αλλάζει μονοτονία στο διάστημα δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα)

Επισημαίνω τα ΒΒ΄και πατώ στον βρόγχο του νέου αρχείου εντολών.Σταματώ την εκτέλεση του νέου αρχείου εντολών. Αφού επισημάνω τα ΒΒ΄κάνω γρήγορη εκτέλεση και δημιουργείται η πολυγωνική γραμμή με τα αντίστοιχα ορθογώνια σε πλήθος m που προσδιορίζεται από το βάθος εκτέλεσης του αρχείου εντολών n.

Έχουμε δυνατότητα να αποκρύψουμε το πολύγωνο που κατασκευάσθηκε και να κατασκευάσουμε άλλο (στο ίδιο διάστημα επιλέγοντας Β και Β΄΄ όπου το Β΄΄ είναι το ομοιόθετο του Β ως προς Α όχι με λόγο 2:1 αλλά με λόγο λ:1.

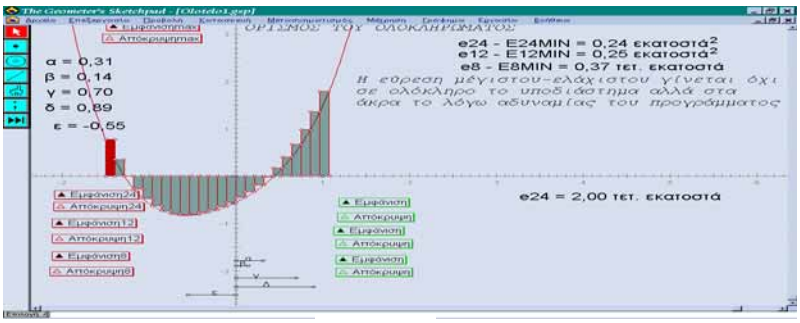
Οι διαδικασίες αυτές μπορούν να επαναληφθούν όσες φορές θέλουμε αλλά κατασκευάζοντας ένα νέο αρχείο εντολών με τις μέγιστες τιμές της συνάρτησης στα άκρα των διαστημάτων μπορώ να πάρω και την δεύτερη κατηγορία πολυγώνων του ορισμού του ολοκληρώματος.

Διδακτικές χρήσεις

Χρησιμοποιώντας το αρχείο *.gsp που με την προηγούμενη διαδικασία κατασκευάσαμε έχουμε την δυνατότητα να εμφανίσουμε τα άκρα της ακολουθίας διαστημάτων στα οποία περιέχεται κατά τον ορισμό το ορισμένο ολοκλήρωμα και βέβαια να διαπιστώσουν οι μαθητές πώς αυξάνοντας τα σημεία χωρισμού του διαστήματος το πλάτος των διαστημάτων μειώνεται άρα υπολογίζουμε με προσέγγιση το ορισμένο ολοκλήρωμα .

Υπάρχει επίσης δυνατότητα για συγκεκριμένο αριθμό υποδιαστημάτων να μεταβάλλουμε το πλάτος τους (άρα και το πλάτος του συνολικού) και να δείξουμε ότι η προσέγγιση είναι ικανοποιητικότερη για τον ίδιο αριθμό σημείων χωρισμού όσο το πλάτος είναι μικρότερο.

Αλλάζοντας τον τύπο της συνάρτησης (από τα slider) και κάνοντας τη θετικά ορισμένη το ολοκλήρωμα προκύπτει θετικό και ίσο με το εμβαδόν του πολυγώνου αλλά σε διαστήματα που η συνάρτηση είναι αρνητικά ορισμένη (το πρόγραμμα setchpad υπολογίζει και προσημασμένα εμβαδά) το ολοκλήρωμα εμφανίζεται αρνητικό άρα δεν είναι ίσο με το στοιχειώδη ορισμό του εμβαδού.



Σχήμα 2

ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕ ΕΜΦΑΝΙΣΗ ΤΩΝ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ Α΄ ΚΑΙ Β΄ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΤΗΣ

Σύντομη περιγραφή της κατασκευής του αρχείου *.gsp

Εμφάνιση των γραφικών παραστάσεων συνάρτησης , της πρώτης και δεύτερης παραγώγου.
Εμφάνιση κατακόρυφης ευθείας βοηθητικής των μετρήσεων.
Κουμπιά απόκρυψης των γραφικών παραστάσεων.

Διδακτικές χρήσεις

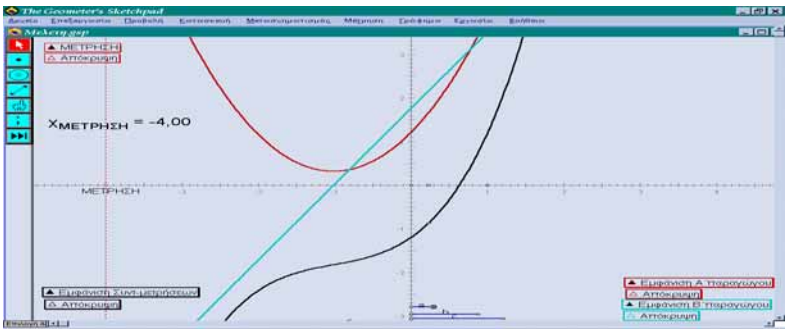
Εμφανίζουμε πρώτα την α΄παράγωγο της συνάρτησης και ζητούμε στους μαθητές να υπολογίσουν τα διαστήματα μονοτονίας της βασικής συνάρτησης

Εμφανίζουμε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης και τα σημεία τομής της α΄ παραγώγου με τον άξονα ΧΧ΄και ζητούμε από τους μαθητές να υπολογίσουν τα διαστήματα μονοτονίας της βασικής συνάρτησης .

Ολοκληρώνοντας, θα πρέπει να σημειώσω ότι το να γίνουν και άλλες δραστηριότητες με τα προγράμματα κινητικής γεωμετρίας είναι θέμα χρόνου και ότι παράλληλα με το Sketchpad μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το Cabri .

Τα αρχεία που προκύπτουν μπορούν να δημοσιευθούν στο δίκτυο είναι πολύ μικρά σε μέγεθος άρα μπορούν σε ελάχιστο χρόνο να κατέβουν στον υπολογιστή του χρήστη και να τρέξουν εφόσον αυτός έχει εγκατεστημένα τα αντίστοιχα προγράμματα.

Επίσης, για τους χρήστες του διαδικτύου που δεν έχουν στη διάθεση τους τα προγράμματα μπορούν να μετατραπούν σε αρχεία HTML και να τρέξουν απευθείας.
Τα αρχεία *.gsp στα οποία έγιναν οι διάφορες δραστηριότητες που παρουσιάζω είναι διαθέσιμα.



Σχήμα 3

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

The Geometer's Sketchpad, Εγχειρίδιο χρήσης.
Βιβλία ΟΕΔΒ Γ΄Γυμνασίου , Α΄Λυκείου , Γ΄Λυκείου Θετικής Κατεύθυνσης
Stewart., I.(1981). "*Concepts of Modern Mathematics*".
Barnsley, M.F.(1993) *Fractals Everywhere* .Academic Press