

**ΑΠΟ ΤΙΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΣΤΑ ΜΕΓΕΘΗ Ή ΤΟ
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ;
ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΗΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $y=ax+b$
ΜΕ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟ**

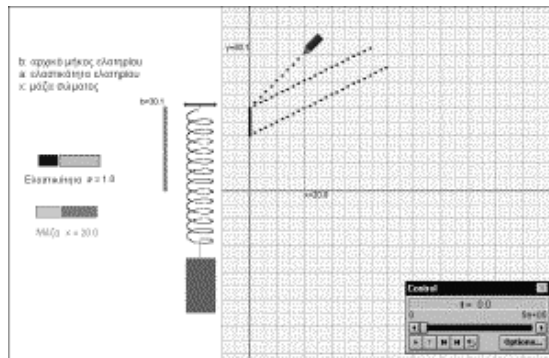
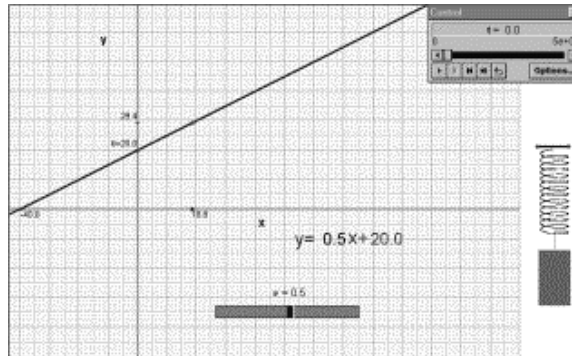
Σωτηρόπουλος Παναγιώτης¹ - Μπακαλίδης Γεώργιος²

⁽¹⁾ Δρ. Επιστημολογίας, MSc Μαθηματικών, Εκπαιδευτικός Β'θμιας Εκπ/σης Ν.
Ξάνθης
psotirop@ceti.gr

⁽²⁾ Δρ. Οπτοηλεκτρονικής, Εκπαιδευτικός Φυσικής-Πληροφορικής Β'θμιας Εκπ/σης
Ν. Ξάνθης
gbakalid@ee.duth.gr

Παιδαγωγική Αναζήτηση

Η σύνδεση μεταξύ τριών, διαφορετικών κατά Bruner, τρόπων αναπαράστασης α) του ενεργητικού (enactive), β) του εικονικού (iconic) και γ) του συμβολικού (symbolic) αποτελεί ένα από τα προβλήματα που η διδακτική πράξη καλείται να αντιμετωπίσει συχνά. Οι δυσκολίες γνωστικής αλλά και επιστημολογικής φύσης που παρουσιάζονται με τη μελέτη των συναρτήσεων και των συναρτησιακών σχέσεων γενικότερα, και της συσχέτισής τους με προβλήματα συγκεκριμενοποίησης των εννοιών που εμπλέκονται, έχουν αναφερθεί συχνά στη βιβλιογραφία. Στην ουσία



πρόκειται για δυσκολίες που αντιμετωπίζει ο μαθητής όταν βρίσκεται αντιμέτωπος με καταστάσεις-προβλήματα που έχουν ένα συγκεκριμένο φυσικό περιεχόμενο. Η μετατροπή της διαπίστωσης ή του συλλογισμού που απορρέει από εμπειρικά δεδομένα, σε έγκυρο μαθηματικό φορμαλισμό (πρόβλημα «επισημοποίησης» της γνώσης), προϋποθέτει την εννοιολογική κατανόηση των συναρτησιακά μεταβαλλόμενων μεγεθών. Στο ερώτημα, αν η μελέτη ενός φυσικού συστήματος (σώματος – ελατηρίου) νοηματοδοτεί μια αφηρημένη μαθηματική έννοια (της γραμμικής συνάρτησης), ή αντίθετα, αν ο υπονοούμενος μαθηματικός φορμαλισμός ($y=ax+b$) είναι αυτός που παρέχει νοηματική ολοκλήρωση στο φυσικό σύστημα, εκτιμούμε πως η απάντηση δεν είναι μονοσήμαντη. Ένα λογισμικό πολλαπλών αναπαραστάσεων μέσα από το συγκεκριμένο σχήμα της μετάβασης από το φυσικό σύστημα στη μαθηματική του περιγραφή (αλγεβρική ή γράφημα) και αντίστροφα, διευκολύνει την κατανόηση της λειτουργίας των μεταβλητών (ανεξάρτητης μεταβλητής vs. Βάρους, εξαρτημένης μεταβλητής vs. Επιμήκυνσης ελατηρίου) και των παραμέτρων (αρχικό μήκος και ελαστικότητα ελατηρίου) μέσα από μια διαδικασία διερεύνησης, ανάγνωσης και ερμηνείας τους. Η αναπαράσταση των πληροφοριών που αναδύονται μέσα από το σύστημα, μετατρέπεται σε έγκυρη μαθηματική τυποποίηση με τη γραφική απεικόνιση ή τη συμβολική καταγραφή, όπως αυτή εμφανίζεται ταυτόχρονα στο περιβάλλον των πολλαπλών αναπαραστάσεων. Είναι σημαντικό, από τη σκοπιά της εποικοδομητικής προσέγγισης, ότι ο μαθητής έχει μέσα από το περιβάλλον αυτό, τον έλεγχο των μεταβολών που επιχειρούνται στο σύστημα. Ο μαθητής αντιλαμβάνεται έτσι ότι η μαθηματική περιγραφή αποτελεί αναπόσπαστο στοιχείο του φυσικού συστήματος. Η συνάρθρωση φυσικών και μαθηματικών εννοιών επιλύει το πρόβλημα της φαινόμενης σημασιολογικής ασυμφωνίας μεταξύ των μαθηματικών εννοιών (κλίση ευθείας, τομή ευθείας και άξονα τεταγμένων) και των αντίστοιχων φυσικών (ελαστικότητα ελατηρίου, αρχικό μήκος ελατηρίου).

Δυναμικός χειρισμός αναπαραστάσεων

Ποια τα πλεονεκτήματα της διττής αναπαράστασης; Ο μαθητής έχει τη δυνατότητα του άμεσου χειρισμού πάνω στο γράφημα παρατηρώντας μέσα από ένα σχήμα μεταφοράς τις αντίστοιχες μεταβολές που προκαλούνται στο φυσικό σύστημα. Έτσι τα αντικείμενα προς μελέτη αναπαρίστανται συνεχώς και με αλληλεπιδραστικό τρόπο. Η συμμετοχική διαδικασία στη μελέτη του φαινομένου γίνεται με μια φυσική ενέργεια και που απαλλάσσει το μαθητή από το βάσανο της πολύπλοκης αλγεβρικής σύνταξης. Οι ενέργειες που απαιτούνται είναι άμεσες, αντιστρέψιμες, πραγματοποιούνται με μικρούς βηματισμούς, εύκολα παρατηρήσιμους, ενώ το αποτέλεσμα της επενέργειας στα αντικείμενα είναι άμεσα αντιληπτό. Με την ενεργητική συμμετοχή του μαθητή στη μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος ο χρήστης μεταβάλλεται σε γνωστικό υποκείμενο που μπορεί να εκτιμήσει ποσοτικά και ποιοτικά τις μεταβολές που προκαλούνται. Ο μαθητής εμπλέκεται έτσι άμεσα στη δυναμική του συστήματος ενεργώντας μεταβολές κατά βούληση στην αναπαράσταση των αντικειμένων και παρατηρώντας τις στιγμιαίες μεταβολές τους. Στο δυναμικό περιβάλλον του συστήματος Γράφημα-Ελατήριο το γράφημα μετατρέπεται σε δυναμικό αντικείμενο ενώ οι αναλλοίωτες του σχήματος που προκύπτει προβάλλουν τα στοιχεία που επιτρέπουν την προτύπωση και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς του

συστήματος Σώμα-Ελατήριο. Το προτεινόμενο περιβάλλον προσομοίωσης επιτρέπει την εξωτερική αναπαράσταση του μαθηματικού περιεχομένου των εννοιών που μελετάμε μέσα από μια διδακτική προσέγγιση κατασκευής και μετάδοσης των μαθηματικών εννοιών. Η αναπαραστατική λειτουργία του περιβάλλοντος που προτείνουμε ενισχύεται από την ταυτόχρονη παρουσία της σημειολογικής τριάδας αναφορά-σημαίνον-σημαινόμενο όπως εκφράζεται από τα δυναμικά αντικείμενα του μικρόκοσμου (Σύστημα Ελατηρίου-σώματος, αλγεβρική μορφή ευθείας, γράφημα ευθείας).

Διδακτικοί στόχοι

- Να κατανοήσει ο μαθητής την αντιστοιχία ανάμεσα στη δυναμική μεταβολή του συστήματος (σώμα-ελατήριο) και της μεταβολής που αυτή επάγει στο γράφημα της συνάρτησης που περιγράφει το σύστημα αυτό.
- Να αντιληφθεί με τη μορφή δυϊκών ζευγών το φυσικό περιεχόμενο του συστήματος μεταβλητών που εμφανίζονται (ανεξάρτητη-εξαρτημένη VS μάζα-επιμήκυνση ελατηρίου) και του λόγου μεταβολής τους (κλίση της ευθείας VS ελαστικότητα του ελατηρίου).
- Να επεξεργάζεται μαθηματικά, διαδικασίες που προκύπτουν μέσα από οικεία στην εμπειρία του προβλήματα φυσικής.
- Να χειρίζεται συναρτησιακές σχέσεις με διαφορετικούς τρόπους μέσα από ένα περιβάλλον ελέγχου.
- Να ερμηνεύει με όρους αλγεβρικούς τα εμπειρικά δεδομένα που προκύπτουν από μεταβολές σε φυσικά συστήματα.
- Να ερμηνεύει με όρους φυσικούς τα ποιοτικά δεδομένα που είναι καταχωρημένα στο γράφημα μιας συνάρτησης.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1: Η γραμμική συνάρτηση $y=ax+b$. Από τα μεγέθη στις μεταβλητές

Εκπαιδευτικό λογισμικό: MODELLUS

Ονοματεπώνυμο:

Τάξη:

Ημερομηνία:

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1

**Τι θα
μελετήσουμε**

Σ' αυτή τη δραστηριότητα θα μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ δύο μεγεθών x και y που μεταβάλλονται το ένα συναρτήσει του άλλου, κατά ένα ορισμένο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα, ως θεωρήσουμε ένα κατακόρυφο ελατήριο στο οποίο αναρτούμε

βάρη και μετρούμε την επιμήκυνση του ελατηρίου κάθε φορά.

- Θα διερευνήσουμε το είδος της σχέσης μεταξύ βάρους και επιμήκυνσης του ελατηρίου.
- Θα μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ του ολικού μήκους του ελατηρίου και του βάρους.
- Θα διερευνήσουμε το είδος της σχέσης μεταξύ βάρους (x) και μήκους ελατηρίου (y) για διαφορετικού αρχικού μήκους (b) και διαφορετικής ελαστικότητας (a) ελατήρια.

- Θα μελετήσουμε τελικά τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=ax+b$.

Οδηγίες χειρισμού

 Με αυτό το κουμπί, από το παράθυρο «Ελεγχος», ενεργοποιείται η προσομοίωση της πειραματικής διάταξης και η αναπαράσταση των μεγεθών σε ένα σύστημα συντεταγμένων x-y.

Στη συνέχεια μπορείτε να μεταβάλετε το βάρος x του σώματος, το αρχικό μήκος b του ελατηρίου και την ελαστικότητα a του ελατηρίου. Πλησιάστε το δείκτη του ποντικιού στον αντίστοιχο μεταβολέα και όταν μετατραπεί σε χέρι μετακινήστε στην τιμή που επιθυμείτε.

 Διακόπτεται προσωρινά η δυνατότητα ελέγχου της διάταξης και του γραφήματος. Με το ίδιο κουμπί παρέχεται ξανά

   Με συνεχόμενα κλικ στα βέλη εκτελείτε ξανά τις ενέργειες που κάνατε (ιστορικό ενεργειών), εφόσον τη σταματήσατε προσωρινά ή τελείωσε ο χρόνος εκτέλεσής της

 Σταματά η προσομοίωση

Επιλέξτε το παράθυρο «Παρουσίαση1»

Στην οθόνη σας εμφανίζεται ένα ελατήριο που έχει ένα αρχικό μήκος $b=20$ και χαρακτηρίζεται από ένα συντελεστή ελαστικότητας $a=0.5$ (πόσο σκληρό ή μαλακό είναι το ελατήριο) από το οποίο μπορείτε να αναρτήσετε βάρη. Με τη βοήθεια του μεταβολέα x μπορείτε να προσθέσετε βάρη στην άκρη του ελατηρίου και να παρατηρήσετε την επιμήκυνση που προκαλείται στο ελατήριο. Ταυτόχρονα παρατηρείτε και τη γραφική παράσταση της σχέσης των μεγεθών αυτών.

Α) Από το μεταβολέα x προσθέστε διαδοχικά βάρη 10, 20, 30, 40, 50 μονάδες βάρους. Σε ποιο μέγεθος προκαλεί μεταβολή η ανάρτηση βαρών;

Μετρήστε την επιμήκυνση του ελατηρίου και συμπληρώστε τον πίνακα τιμών. (Σημείωση: Ως επιμήκυνση θεωρείται η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου)

Βάρος	10	20	30	40	50
Επιμήκυνση σε cm					

Β) Να εξετάσετε αν τα ποσά «επιμήκυνση» και «βάρος» είναι ανάλογα. Με ποιο τρόπο θα το διαπιστώσετε αυτό;

Γ) Από ποια συνάρτηση περιγράφεται η σχέση μεταξύ των δύο αυτών ποσών;

Να προσδιορίσετε ποιες μεταβλητές αντιστοιχούν σε ποια ποσά.

Δ) Να εκφραστεί το ολικό μήκος του ελατηρίου ως συνάρτηση του βάρους.

Ε) Παρατηρήστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής. Τι είναι; Που τέμνει τον άξονα yy' ;

Στ) Μπορείτε να ερμηνεύσετε τη σημασία του αρχικού μήκους του ελατηρίου και της μορφής του γραφήματος;

Ζ) Αφαιρέστε το βάρος από το κάτω μέρος του ελατηρίου (δηλ. $x=0$). Αλλάξτε το αρχικό μήκος του ελατηρίου σε $b=30$. Αναρτήστε διαδοχικά βάρη, όπως στην περίπτωση (Α), και παρατηρήστε το γράφημα που παράγεται. Τι συμπεραίνετε για τη μορφή του γραφήματος; Μπορείτε να εξηγήσετε τη μορφή του σε σχέση με το προηγούμενο γράφημα;

Η) Αφαιρέστε πάλι το βάρος από το κάτω μέρος του ελατηρίου (δηλ. $x=0$). Αλλάξτε τώρα μόνο την ελαστικότητα του ελατηρίου από το μεταβολέα a και δώστε την τιμή $a=1.0$. Αναρτήστε διαδοχικά βάρη, όπως στην περίπτωση (Α), και παρατηρήστε το γράφημα που παράγεται. Τι διαπιστώνετε;

Θ) Επαναλάβετε τη διαδικασία ανάρτησης βαρών για $a=0$. Τι παρατηρείτε στη συμπεριφορά του συστήματος σώματος – ελατηρίου; Ποιο το φυσικό περιεχόμενο της τιμής $a=0$; Ποια η μορφή του γραφήματος; Γράψτε τη σχέση μεταξύ του ολικού μήκους του ελατηρίου και βάρους. Ποια η σχέση μεταξύ του ολικού μήκους και του αρχικού μήκους;

Έχοντας ολοκληρώσει τη μελέτη σας να κάνετε τις κατάλληλες αντιστοιχίες στον παρακάτω πίνακα.

Ανεξάρτητη μεταβλητή x		Ελαστικότητα ελατηρίου
Εξαρτημένη μεταβλητή y		Βάρος
Κλίση ευθείας a		Επιμήκυνση ελατηρίου
Σημείο τομής ευθείας και άξονα yy'		Αρχικό μήκος ελατηρίου
Γραμμική συνάρτηση $y=ax$		Σχέση επιμήκυνσης - βάρους
Γραμμική συνάρτηση $y=ax+b$		Ολικό μήκος ελατηρίου
		Σχέση ολικού μήκους – βάρους

Δραστηριότητα 2 : Η γραμμική συνάρτηση $y=ax+b$. Από τις μεταβλητές στα μεγέθη

Εκπαιδευτικό λογισμικό Modellus

Ονοματεπώνυμο:

Τάξη:

Ημερομηνία:

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2

Τι θα μελετήσουμε

Στη δραστηριότητα αυτή θα μελετήσουμε το φυσικό περιεχόμενο των μεταβολών που παρατηρούμε στο γράφημα μιας συνάρτησης της μορφής $y=ax+b$. Πιο συγκεκριμένα, ενώ στην προηγούμενη δραστηριότητα η μελέτη έγινε με τη μετάβαση από το σύστημα ελατήριο-σώμα στο γράφημα, στη δραστηριότητα αυτή θα εξετάσουμε πώς οι μεταβολές στο γράφημα (μεταβλητές x και y, κλίση ευθείας a, συντελεστής b), προκαλούν μεταβολές στο σύστημα ελατήριο-σώμα.

Οδηγίες χειρισμού

 Με αυτό το κουμπί, από το παράθυρο «Έλεγχος», ενεργοποιείται η αναπαράσταση των μεγεθών x, y στο σύστημα συντεταγμένων.

Στη συνέχεια μπορείτε να μετακινείτε το σημείο x πάνω στον άξονα xx', το σημείο τομής της ευθείας $y=ax+b$ με τον άξονα yy' και την κλίση a αυτής της ευθείας. Πλησιάστε το δείκτη του ποντικιού στο σημείο και όταν μετατραπεί σε χέρι μετακινήστε το όπου επιθυμείτε.

 Διακόπτεται προσωρινά η δυνατότητα μετακίνησης των σημείων. Με το ίδιο κουμπί παρέχεται ξανά

 Με συνεχόμενα κλικ στα βέλη εκτελείτε ξανά, τις ενέργειες που κάνατε (ιστορικό ενεργειών) εφόσον τη σταματήσατε προσωρινά ή τελείωσε ο χρόνος εκτέλεσής της

 Απενεργοποιείται η δυνατότητα χειρισμού του γραφήματος

Επιλέξτε το παράθυρο «Παρουσίαση2»

Στην οθόνη σας εμφανίζεται το γράφημα (ευθεία) μιας συνάρτησης της μορφής $y=ax+b$ και το σύστημα ελατήριο-σώμα. Μετακινώντας το σημείο x πάνω στο

γράφημα με το ποντίκι παρατηρούμε τις αντίστοιχες μεταβολές στο ελατήριο. Μεταβολές με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να προκαλέσουμε στο σημείο που η ευθεία τέμνει τον άξονα yy' ή στην κλίση της ευθείας από το μεταβολέα a .

A) Για τη συγκεκριμένη θέση που εμφανίζεται στην οθόνη σας το γράφημα της συνάρτησης, μεταβάλετε τη θέση του x . Τοποθετήστε το x στη θέση $x=10$. Ποια είναι η αντίστοιχη τιμή του y ; Πώς μπορείτε να βρείτε από την αλγεβρική μορφή της συνάρτησης την τιμή του y ;

Τι παρατηρείτε στο σύστημα ελατήριο-σώμα; Πώς εξηγείται αυτό; Να γράψετε σε τι αντιστοιχούν οι μεταβλητές x και y στο σύστημα ελατήριο-σώμα;

B) Στο γράφημα μετακινήστε το x έτσι ώστε να πάρει την τιμή $x=0$.

Αλλάξτε τώρα το σημείο τομής της ευθείας και του άξονα yy' έτσι ώστε αυτή να τέμνει τον άξονα στο σημείο $(0, 30)$. Ποια παράμετρος έχει αλλάξει στην αλγεβρική μορφή της εξίσωσης $y=ax+b$ και τι συμβαίνει στο γράφημα της ευθείας;

Με αυτές τις αλλαγές στο γράφημα, τι έχετε μεταβάλει στο σύστημα ελατήριο-σώμα;

Μετακινήστε πάλι το x στη θέση $x=10$. Ποια είναι τώρα η αντίστοιχη τιμή του y ;

Συνοψίστε στον παρακάτω πίνακα τις τιμές του y για τις περιπτώσεις (A) και (B)

	$b=20$	$b=30$
x	10	10
y		

Τι συμπεραίνετε;

Γ) Στο γράφημα μετακινήστε το x έτσι ώστε να πάρει την τιμή $x=0$. Μετακινήστε και το b στην τιμή $b=20$. Από το μεταβολέα a αλλάξτε την κλίση της ευθείας έτσι ώστε $a=2$. Παρατηρήσατε κάποια μεταβολή στο σύστημα ελατήριο-σώμα;

Μετακινείστε πάλι το x στη θέση $x=10$. Για τη νέα τιμή της κλίσης ποια είναι τώρα η αντίστοιχη τιμή του y ;

Συνοψίστε στον παρακάτω πίνακα τις τιμές του y για τις περιπτώσεις (A) και (Γ)

	$a=0.5$	$a=2$
--	---------	-------

x	10	10
y		

Τι συμπεραίνετε;

Στο σύστημα ελατήριο-σώμα, ποιο φυσικό μέγεθος θεωρείτε ότι αντιστοιχεί η κλίση της ευθείας;

Αλλάξτε την κλίση της ευθείας έτσι ώστε να γίνει παράλληλη με το άξονα x. Γράψτε τώρα την αλγεβρική μορφή που παίρνει η εξίσωση $y=ax+b$: _____

Μετακινήστε το x από την τιμή $x=0$ έως την τιμή $x=50$. Ποιες τιμές παίρνει το y; Τι παρατηρείτε στο σύστημα ελατήριο σώμα και τι σημαίνει αυτό για το ελατήριο;
