

Σχεδίαση και μετασχηματισμοί Συνδεόμενων Οπτικών Αναπαραστάσεων-Εφαρμογή στη διδασκαλία σε τάξη

Σταυρούλα Πατσιομίτου

spatsiom@cc.uoi.gr

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Ιωάννινα

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αναλύεται η δομή των Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ΣΟΕΑ) (Linking Visual Active Representations) λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας μέσω των τεχνικών μοντελοποίησης. Ειδικότερα, εξετάζεται πώς ο σύνθετος μετασχηματισμός της περιστροφής και μεταφοράς σε οπτικά, διαδικαστικά και εννοιολογικά συνδεδεμένες οπτικές αναπαραστάσεις επιδρά στην ανάπτυξη της ικανότητας οπτικοποίησης της έννοιας, μετασχηματίζοντας τη λεκτική ικανότητα των μαθητών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της επίδρασης της εφαρμογής των μετασχηματισμών ΣΟΕΑ σε μαθητές μιας τάξης Γυμνασίου, οι οποίοι δημιούργησαν συνδεδεμένες οπτικές αναπαραστάσεις και απέδειξαν οπτικά και θεωρητικά θεώρημα, αναπτύσσοντας επαγωγικό και παραγωγικό συλλογισμό.

Λέξεις κλειδιά: Συνδεδεμένες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις, λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, μετασχηματισμός περιστροφής και μεταφοράς, επίπεδα van Hiele.

Εισαγωγή

Οι Gonzalez & Herbst (2009) ορίζουν «το δυναμικό διάγραμμα [ως] ένα διάγραμμα κατασκευασμένο σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας που έχει τη δυνατότητα να μεταβληθεί με το σύρσιμο ενός στοιχείου του» (p. 154). Ένα δυναμικό διάγραμμα μπορεί να περιλαμβάνει πολλά επιμέρους γεωμετρικά αντικείμενα και συνδυασμούς αλληλεπιδραστικών τεχνικών (Sedig & Sumner, 2006) που εφαρμόζονται σ' αυτά. Η αλληλεπίδραση με ένα δυναμικό διάγραμμα έχει δύο συνιστώσες: το χρήστη ο οποίος δρα πάνω στο διάγραμμα και το διάγραμμα που «αντιδρά» ως απάντηση στη δράση του μαθητή-χρήστη (Sedig & Sumner, 2006, p.5). Έτσι η μαθηματική γλώσσα των μαθητών και οι μαθηματικές έννοιες προκύπτουν ως «δυναμική επανεφεύρεση» στο δυναμικό περιβάλλον σε αλληλεπίδραση με τις τεχνικές του δυναμικού διαγράμματος (Patsiomitou, 2012). Με τον όρο *ημιπροκατασκευασμένα δυναμικά διαγράμματα* εννοούνται τα διαγράμματα που έχουν κοινά χαρακτηριστικά γνωρίσματα με τα προκατασκευασμένα διαγράμματα, αλλά και δυνατότητα αναμόρφωσης των μερών τους ώστε οι μαθητές να οδηγηθούν μέσω της δυναμικής επανεφεύρεσης στη λύση του προβλήματος που έχει προβλεφθεί από το δάσκαλο [ή τον ερευνητή] των μαθηματικών. Στην παρούσα μελέτη ο σχεδιασμός των ημιπροκατασκευασμένων διαγραμμάτων μέσω Συνδεόμενων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (ΣΟΕΑ) (Linking Visual Active Representation (LVAR), π.χ. Patsiomitou, 2008) έγινε από την ερευνήτρια, η οποία δημιούργησε μια αλυσιδωτή ακολουθία απαντήσεων σε ερωτήσεις που οδηγούν στην κατασκευή μιας ακολουθίας διαδικασιών οι οποίες με τη σειρά τους οδηγούν σε οπτική και θεωρητική απόδειξη του πραγματικού προβλήματος (ή του θεωρήματος). Για να οδηγηθεί στο αποτέλεσμα αυτό η ερευνήτρια 'μετατοπίστηκε' νοητικά από τη θέση του παρατηρητή εκπαιδευτικού στη θέση του δρώντα μαθητή (Cobb, Yackel & Wood, 1992 οπ. αναφ. στο Gravemeijer, 2004), και εξετάσε πλέον το

σχεδιασμό της δραστηριότητας από τη σκοπιά αυτή. Στις επόμενες ενότητες εξετάζεται η έννοια των ΣΟΕΑ στην τέταρτη φάση της μαθησιακής διαδικασίας ενός υποθετικού μαθησιακού μονοπατιού (Patsiomitou, 2008a, b, 2010, 2012). Αναλύονται οι τεχνικές μοντελοποίησης των πέντε τύπων ΣΟΕΑ με παραδείγματα από δυο μοντελοποιημένα προβλήματα, που δημιουργήθηκαν από την ερευνήτρια στο περιβάλλον του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991). Στη συζήτηση που ακολουθεί εξετάζεται η επίδραση των μετασχηματισμών ΣΟΕΑ θεωρήματος της γεωμετρίας σε μαθητές Γυμνασίου της ερευνήτριας, οι οποίοι ανέπτυξαν οπτικά και θεωρητικά συνδεδεμένες αναπαραστάσεις σε στατικό και δυναμικό μέσο.

Γιατί Συνδεδεμένες Οπτικές Ενεργές Αναπαραστάσεις;

Ο όρος των ΣΟΕΑ προέκυψε ως σύνθεση επιμέρους όρων που αναλύονται στη συνέχεια και αφορούν τους μετασχηματισμούς στοιχείων ή διαδικασιών δυναμικών αντικειμένων (ή οντοτήτων), ως αποτέλεσμα της επεξεργασίας των πληροφοριών και του απευθείας χειρισμού των εννοιών στην οθόνη (Patsiomitou, 2010) : (α) **Συνδεδεμένες**: γιατί μπορούν να συνδεθούν αλλά δεν είναι κατ' ανάγκη συνδεδεμένες. (β) **Οπτικές**: όπως όλα τα αντικείμενα ενός περιβάλλοντος λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας είναι αναπαραστάσεις της οντότητας που αναπαριστούν. (γ) **Ενεργές**: μια αναπαράσταση μπορεί να χαρακτηριστεί ενεργή όταν προκαλεί δράση, κίνηση ή αλλαγή γιατί είναι σε λειτουργία, σε επίδραση ή σε εξέλιξη. Οι δυναμικές αναπαραστάσεις μπορούν πάντοτε να είναι ενεργές αν προκαλέσουμε μια δράση επί αυτών, αλλά δεν είναι πάντοτε προκατασκευασμένες. Τέλος οι ΣΟΕΑ συνιστούν ημι-προκατασκευασμένα δυναμικά διαγράμματα που μπορεί να συνδεθούν και γίνονται ενεργά σύμφωνα με τις επιθυμίες του χρήστη, δηλαδή δεν είναι περιορισμένα σε ενέργειες που «είναι προ-σχεδιασμένες από τον κατασκευαστή του σχεδίου και περιορίζουν τις επιλογές του χρήστη» (Sinclair, 2001, p. 3). Μια ημιπροκατασκευασμένη δυναμική αναπαράσταση ΣΟΕΑ, χαρακτηρίζεται έτσι λόγω της ιδιότητας της να μετασχηματιστεί και υποστεί αλλαγές που μπορεί ο μαθητής να προκαλέσει (π.χ. διαγραφή τμήματός του και επανασύνθεσή του) οι οποίες όμως θα την επαναφέρουν στην προκατασκευασμένη από την ερευνήτρια μορφή. Για παράδειγμα, η διαγραφή ενός δυναμικού σημείου F θα διαγράψει τα υπόλοιπα εξαρτώμενα από αυτό αντικείμενα με συνέπεια να μην λειτουργεί η δραστηριότητα (Patsiomitou, 2012). Επομένως, η διαγραφή του σημείου αυτού συνεπάγεται την επανασύνθεση της στην αρχική μορφή της δυναμικής αναπαράστασης. Από την άλλη, δεν είναι ένα ετοιμοπαράσκευασμένο περιβάλλον που προέκυψε ως σύνθεση τεχνικών αμετάβλητων, αφού η σύνθεση του ίδιου περιβάλλοντος μπορεί να προκύψει από τη σύνδεση διαφορετικών εναλλακτικών τεχνικών οι οποίες όμως θα επιφέρουν το ίδιο αποτέλεσμα και επομένως η αρχική ιδέα δεν αναδιαμορφώνεται. Από αυτή την άποψη ο χρήστης δεν είναι περιορισμένος ως προς την ακολουθία των εργαλείων που θα επιλέξει προκειμένου να επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα στην οθόνη, αφού η δράση επί της δυναμικής αναπαράστασης αφήνει αναλλοίωτες τις ιδιότητες των ευθύγραμμων τμημάτων (π.χ την καθετότητα και ισοότητα).

Ανάλυση των τεχνικών μοντελοποίησης στο λογισμικό.

Η μοντελοποίηση του προβλήματος προκύπτει με την παραγωγή ενός ημι-προκατασκευασμένου διαγράμματος στο χωρογραφικό επίπεδο. Η σύνθεση του διαγράμματος αποτελείται από τις παρακάτω αλληλεπιδραστικές τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν για τη συγκρότηση των περισσότερων φάσεων: (α) **χρήση της περιστοπής** περί το σημείο P και O των τμημάτων PF, FO για την κατασκευή των σημείων

Κ, Λ της διαγραμματικής αναπαράστασης στο λογισμικό (δείτε Σχήμα 1). Αυτή η διαδικασία διατηρεί σταθερά στην οθόνη τα τμήματα PF, FO και προσθέτει τα νέα τμήματα PK, OL. Δημιουργείται έτσι μια αναδιοργάνωση της οπτικής αναπαράστασης, «μια εκ νέου ρύθμιση δηλαδή των στοιχείων της που δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να καταλάβουν τις εσωτερικές σχέσεις μεταξύ τους» (Spence, 2001 ο.π. στους Sedig & Sumner, 2006). Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε σε όλους τους τύπους ΣΟΕΑ. (β) **χρήση του κουμπιού απόκρυψης/εμφάνισης** για τα σημεία Κ, Λ και το σημείο Τ το οποίο δίνει την δυνατότητα του πειραματισμού με απευθείας χειρισμό (direct manipulation) και ανασύνθεσης του διαγράμματος. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε στον πρώτο, δεύτερο και πέμπτο τύπο των ΣΟΕΑ. (γ) **χρήση του προσωρινού σχολιασμού (annotating) του διαγράμματος από το ίχνος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ** μέσω του συρσίματος ώστε να εξετάσουν οι μαθητές τις πιθανές θέσεις του σημείου Τ όταν μετακινήσουν με χρήση του συρσίματος το σημείο F. Η σχεδίαση ίχνους έχει ως αποτέλεσμα ένα δεύτερο μετασχηματισμό που οδηγεί τους μαθητές να προσέξουν το αναλλοίωτο της θέσης του σημείου Τ. Το σημείο αυτό διερευνήθηκε για τη διατύπωση εικασιών και επιχειρημάτων με μορφή γενίκευσης εκ μέρους των μαθητών. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε στο διερευνητικό στάδιο και στον πρώτο τύπο των ΣΟΕΑ. (δ) **χρήση του μόνιμου σχολιασμού του διαγράμματος μέσω του χρωματισμού των μερών του**, ώστε να αναγνωρίσουν οι μαθητές οπτικά την ισοτιμία των στοιχείων του διαγράμματος. Για παράδειγμα στο δεύτερο τύπο των ΣΟΕΑ, έχουν χρησιμοποιηθεί οι τεχνικές περιστροφής, παρουσίας κουμπιών ενέργειας, μόνιμου σχολιασμού (χρωματισμού των ψηφιακών artifacts) με αποτέλεσμα οι ακολουθιακές φάσεις του υπό διερεύνηση προβλήματος να εμφανίζονται σταδιακά σε ένα συνολικό σχήμα.

Πραγματικά προβλήματα και μοντελοποίηση με ΣΟΕΑ

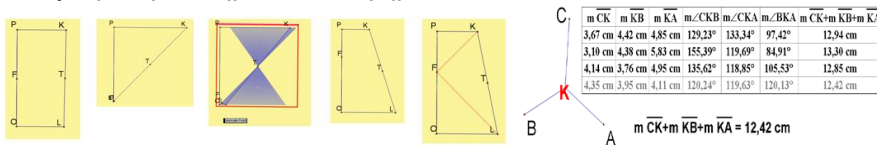
Τα προβλήματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια έχουν διερευνηθεί από τους μαθητές της πειραματικής ομάδας κατά τη διάρκεια ερευνητικής διαδικασίας (π.χ Patsiomitou, 2008a, b, 2010, 2011, 2012; Patsiomitou & Emvalotis, 2009, 2010) η οποία είχε στόχο τη διερεύνηση της ανάπτυξης ικανοτήτων εκ μέρους τους αλλά και του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης σύμφωνα με τη θεωρία των van Hiele (π.χ., Fuys et al, 1984; Senk, 1989). Θα εξεταστεί πώς ένα πρόβλημα μπορεί να μετασχηματιστεί μέσω των πέντε διαφορετικών τύπων ΣΟΕΑ, με βασική ιδέα το συνδεόμενο εννοιολογικά μετασχηματισμό των υποσημαμάτων του σχήματος, διαδικασίες που έχουν αναλυθεί διεξοδικά και έχουν θεωρηθεί πρωτότυπες σε αρκετά διεθνή έγκριτα επιστημονικά άρθρα και περιοδικά (π.χ, Patsiomitou, 2008a, b, 2010, 2011, 2012; Patsiomitou & Emvalotis, 2009, 2010). Τα προβλήματα είναι η αναθεωρημένη έκδοση (1) του «χαμένος θησαυρός των πειρατών» (de Villiers, 1999; Scher, 2003), πρόβλημα διατυπωμένο από το Ρώσο, George Gamow (1948, 1988) (2) του προβλήματος «ελάχιστης απόστασης των τριών πόλεων» (Olive, 2000), αναδιατυπωμένα από την ερευνήτρια (Patsiomitou, 2008a, b; 2010).

Α πρόβλημα: Στην Οδύσσεια (γ74-77) αναφέρεται ότι πειρατές εμφανίστηκαν και στα Ελληνικά νησιά. Ο πειρατής της ιστορίας μας έθαψε τον θησαυρό του στο νησί της Θάσου, και αποτίπωσε το σχέδιο του σε ένα χάρτη. Αφού τοποθέτησε σημαία σε ένα σημείο F προχώρησε ως τον φοίνικα Ρ, έστριψε δεξιά κατά γωνία 90° και προχώρησε ίση απόσταση. Εκεί τοποθέτησε ένα λάσλο Κ. Όμοια έκανε και ως το άλλο δέντρο Ο. Στην συνέχεια συνέδεσε τους δυο λάσλους και στο μέσο της απόστασης ΚΛ έθαψε τον θησαυρό. Με την πάροδο του χρόνου η σημαία καταστράφηκε (πατήστε το κουμπί **Απόκρυψη αντικειμένων**). Μπορείτε να τον βοηθήσετε να βρει τον θησαυρό;

Β πρόβλημα: Ένα εργοστάσιο ηλεκτρικής ενέργειας πρόκειται να κτιστεί για να εξυπηρετήσει τις ανάγκες των πόλεων της Αθήνας, της Θεσσαλονίκης και της Πάτρας. Που πρέπει να βρίσκονται προκειμένου να χρησιμοποιηθεί το ελάχιστο καλώδιο υψηλής τάσεως που θα τροφοδοτήσει με ηλεκτρική ενέργεια τις τρεις πόλεις;

Τύποι Συνδεδεμένων Οπτικών Ενεργών Αναπαραστάσεων (Patsiomitou, 2008a, b; 2010)

A τύπος-διερευνητικός/πληροφοριακός: Στον πρώτο τύπο ΣΟΕΑ του πρώτου προβλήματος έχουν χρησιμοποιηθεί οι τεχνικές περιστροφής, ίχνους ευθύγραμμου τμήματος και προσθήκης κίνησης. Η προσθήκη κίνησης του σημείου F επί του ευθύγραμμου τμήματος PO επιφέρει το μετασχηματισμό των τμημάτων PF, FO και των τμημάτων από περιστροφή (ειδώλων τους). Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού του σημείου F επιφέρει το μετασχηματισμό των σημείων K, L επομένως και του τμήματος KL, το οποίο αφήνει ίχνη στην οθόνη. Οι συνεχείς μετασχηματισμοί διατηρούν την αμεταβλητότητα της θέσης και ιδιότητας του σημείου T στην οθόνη, αφού οι αποστάσεις KT, TL παραμένουν ίσες καθώς αλλάζει η θέση του σημείου F στο τμήμα PO.

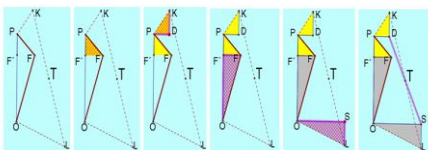


Σχήμα 1. Πρώτος τύπος των ΣΟΕΑ στα δυο προβλήματα (π.χ., Patsiomitou, 2008 b; 2010; 2012)

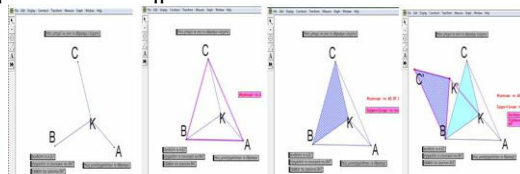
Το σύρσιμο του σημείου F ώστε να τοποθετηθεί στο μέσο της απόστασης ή σε μια από τις θέσεις των σταθερών σημείων P, O διερευνήθηκε για τις ειδικές περιπτώσεις και για τη διατύπωση συλλογισμών επαγωγικού τύπου. Αυτή η διαδικασία «επιτρέπει στους μαθητές να αντιληφθούν την εγγενή δομή του υλικού που παρουσιάζεται» (Dina van Hiele, οπ. αναφ. στο Fuys et al., 1984, p.218) και αφού οδηγηθούν σε «σκόπιμες ενέργειες» για την παρατήρηση της «ισότητας των στοιχείων και μερών των σχημάτων», να αναστοχαστούν τις σχέσεις των αντικειμένων, παρατηρώντας τις κανονικότητες που προκύπτουν.

Στόχος είναι να διερευνηθεί αν οι μαθητές είναι σε θέση να κατασκευάσουν ένα σχήμα εργαλειοποιημένης δράσης και το **όργανο** που περιλαμβάνει έννοιες (π.χ την έννοια της συμμετρίας), να αναπτύξουν λογικο-παραγωγικά επιχειρήματα βασισμένοι στις προϋπάρχουσες γνώσεις τους, προκειμένου να αιτιολογήσουν το συλλογισμό τους για την επίλυση του προβλήματος και την εφαρμογή της διαδικασίας στην εύρεση της λύσης, γενικής ή ειδικής (Patsiomitou, 2000a, b, 2010, 2012).

B τύπος-καθοδηγούμενης ανακάλυψης: Στο δεύτερο τύπο ΣΟΕΑ, τα διαδοχικά συνδεδεμένα βήματα της λύσης προκύπτουν σταδιακά με το πάτημα των κουμπιών απόκρυψης/εμφάνισης. Δηλαδή, εμφανίζονται σταδιακά τα ζεύγη ίσων τριγώνων και τα ευθύγραμμα τμήματα DS, KL τα οποία τέμνονται στο σημείο T.



Σχήμα 2. Δεύτερος τύπος των ΣΟΕΑ
A πρόβλημα



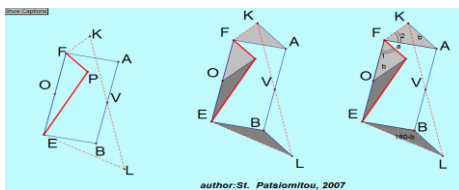
Σχήμα 3. Δεύτερος τύπος των ΣΟΕΑ
B πρόβλημα

Η δυναμική αναπαράσταση μετασχηματίζεται μέσω του εργαλείου απόκρυψης/ εμφάνισης, το οποίο οδηγεί τους «μαθητές [να] εστιάσουν σε ότι μένει ορατό στην οθόνη [...]. Οι

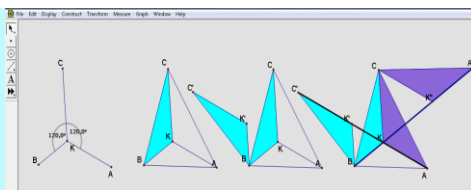
μετασχηματισμοί στην οθόνη επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζουν οι μαθητές τις εικασίες και την αποδεικτική διαδικασία» (Olivero, p. 279).

Στόχος είναι οι μαθητές να κατασκευάσουν έννοιες-εν-δράσει ως αποτέλεσμα των σχημάτων εργαλειοποιημένης δράσης των αντικειμένων από περιστροφή που έχουν κατασκευάσει στην οθόνη, επεκτείνοντας τα χρηστικά σχήματα που έχουν κατασκευάσει σε προηγούμενη φάση της ερευνητικής διαδικασίας, κατασκευάζοντας επομένως δεύτερου τύπου χρηστικά σχήματα (Drijvers & Trouche, 2008, p. 372), στα οποία τα αρχικά λειτουργούν ως δομικές μονάδες (Patsiomitou, 2012, p.69)

Γ τύπος- επεξηγηματικός: Οι μετασχηματισμοί στις όλο και πιο σύνθετες συνδεδεμένες δυναμικές αναπαραστάσεις του προβλήματος στον τύπο αυτόν, τροποποιούν ταυτόχρονα τις εμφανιζόμενες σχηματικές μορφοποιήσεις.



Σχήμα 4. Τρίτος τύπος ΣΟΕΑ- Α



Σχήμα 5. Τρίτος τύπος ΣΟΕΑ- Β πρόβλημα

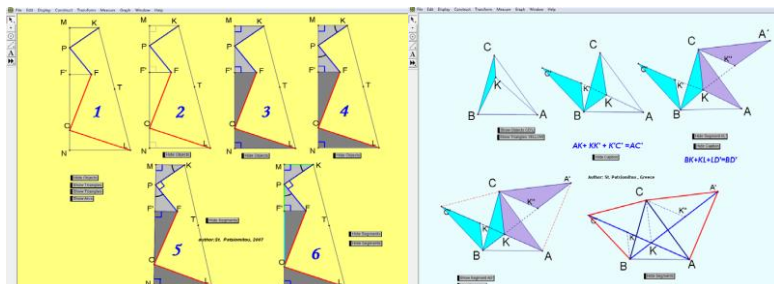
Συγκεκριμένα στον τρίτο τύπο εμφανίζονται ταυτόχρονα δυναμικά συνδεδεμένες αναπαραστάσεις, λόγω του μετασχηματισμού της μεταφοράς που είναι κατασκευασμένες, οι οποίες συνδέονται δομικά με το δεύτερο τύπο. Η ακολουθία των κατασκευαστικών βημάτων εμφανίζει στην οθόνη την εξελικτική διαδικασία μετασχηματισμού της αναπαράστασης, με τρόπο ώστε κάθε βήμα να είναι συνδεδεμένο από το προηγούμενο και ο μαθητής να υποβοηθείται μέσω της οπτικοποίησης των συνδεδεμένων αναπαραστάσεων σε λεκτικές διατυπώσεις. Για παράδειγμα, οι πλευρές, τα τρίγωνα και οι ισότητες των στοιχείων των ίσων ζευγών τριγώνων εμφανίζονται σε πιο γενικευμένη μορφή από τις προηγούμενες φάσεις. Ο σύνθετος μετασχηματισμός μεταφοράς-σύνθεσης με εργαλεία σχολιασμού της αναπαράστασης επιφέρει την ταυτόχρονη μεταβολή των αντικειμένων μέσω συρσίματος σε όλες τις συνδεδεμένες αναπαραστάσεις.

Στόχος είναι το σύρσιμο σημείων στην οποιαδήποτε δυναμική αναπαράσταση του τρίτου τύπου να επιφέρει ταυτόχρονη μεταβολή στις άλλες, με συνέπεια την παρατήρηση των αμετάβλητων στοιχείων σε όλα τα σχήματα ταυτόχρονα, λόγω των μεταβολών πραγματικού χρόνου μέσω απευθείας χειρισμού του 'δυναμικού σημείου' (Patsiomitou 2008a, b, 2010, 2012). Το σχήμα ως αποτέλεσμα των χειρισμών, δέχεται μια μεταμόρφωση η οποία στοχεύει στη φαινομενολογική ανάλυση και επεξήγηση των ιδιοτήτων, δηλαδή μετασχηματίζεται γνωστικά σε γεωμετρικό σύμβολο (Dina van Hiele οπ. αναφ. στο Fuys et al., 1984).

Δ τύπος- ελεύθερης ανακάλυψης: Στον τέταρτο τύπο οι αναπαραστάσεις εμφανίζουν σταδιακά μια αυξανόμενη σύνδεση ως εξελικτική διαδικασία η καθεμιά της προηγούμενης αναφορικά με τον τρόπο που επισημαίνονται τα ίσα στοιχεία τους. Και ενώ οι επεξηγήσεις στον τύπο του καθοδηγούμενου προσανατολισμού των ΣΟΕΑ εξαρτώνται από τις συνδεδεμένες αναπαραστάσεις για το ειδικό διάγραμμα, στον επεξηγηματικό τύπο θα πρέπει να αναλυθούν θεωρητικά τα αποτελέσματα στην οθόνη εν κινήσει και για όλη την κλάση των αντικειμένων που προκύπτουν.

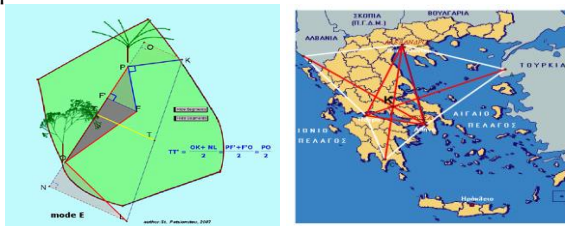
*Στόχος του τέταρτου τύπου [ή τύπο ελεύθερου προσανατολισμού] είναι να επεξηγηθούν θεωρητικά και τα αποτελέσματα για την κλάση των αναπαραστάσεων κάθε μεμονωμένης φάσης που οικοδομεί το σχήμα της λύσης, να οδηγηθούν οι μαθητές στις ιδιότητες των σχημάτων και να πάρουν να επηρεάζονται από την εικόνα, δηλαδή «το σχήμα να αποκτήσει τη θέση ενός συνόλου ιδιοτήτων» ή να αποκτήσει το **χαρακτήρα σχήματος** (π.χ., van Hiele, 1986). Οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν τις διαδικασίες που έλαβαν χώρα και να καταλήξουν σταδιακά σε συμπεράσματα για τις ιδιότητες και τις σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων των σχημάτων από τα ενδεικτικά σημεία που έχουν τοποθετηθεί στα σχήματα (π.χ. σημάδια γωνιών). Με τον τρόπο αυτό*

κατασκευάζουν μια άπειρη κλάση μετασχηματιστικών διαδικασιών του ίδιου γεωμετρικού αντικειμένου στην οθόνη, ως γενίκευση των συμπερασμάτων τους από τους προηγούμενους τύπους ΣΟΕΑ (Patsiomitou, 2008a, b, 2010)



Σχήμα 6. Τέταρτος τύπος των ΣΟΕΑ στα δυο προβλήματα

Για παράδειγμα, στο σχήμα 6 οι προκύπτουσες αναπαραστάσεις μπορούν να συρθούν ανεξάρτητα. Στο στάδιο αυτό οι μαθητές πρέπει να έχουν την ικανότητα να «διαβάζουν» το διάγραμμα, να συνδέουν τις πολλαπλές αναπαραστάσεις (συμβολικές, εικονικές και λεκτικές) με τις προηγούμενες φάσεις του προβλήματος μέσω των ΣΟΕΑ που έχουν διερευνήσει, ώστε να οδηγηθούν σε αποδεικτική διαδικασία υποβοηθούμενοι από τον καθοδηγητικό σχολιασμό των αναπαραστάσεων. Οι μαθητές επανεφευρίσκουν το δίκτυο των σχέσεων που συνδέει τα γεωμετρικά αντικείμενα με συνεχείς μετασχηματισμούς μεταξύ του θεωρητικού και χωρογραφικού πεδίου. Η εμφάνιση των κατασκευαστικών γραμμών με το σύστημα του σχήματος βοηθά τους μαθητές να θέσουν ανοικτούς στόχους με πολλαπλά βήματα και εναλλακτικές λύσεις, επεκτείνοντας τις γνώσεις τους σε ό,τι έχουν προηγουμένως αντιμετώπισει.



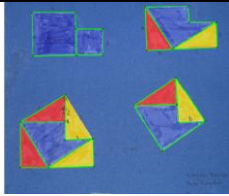
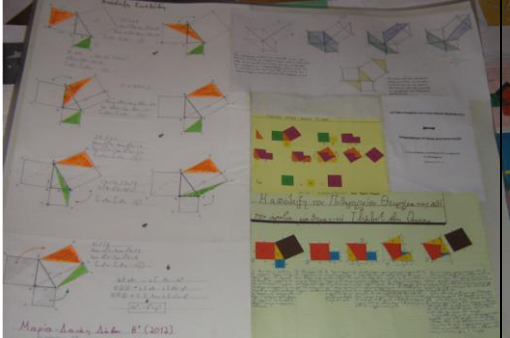
Σχήμα 7. Πέμπτος τύπος των ΣΟΕΑ στα δυο προβλήματα

Ε τύπος- ολοκλήρωσης: Οι διάφορες μορφοποιήσεις που συνδέονται γνωστικά και όχι κατασκευαστικά πάντα στις διαφορετικές σελίδες του αρχείου του λογισμικού συνθέτουν σφαιρικά τη λύση του προβλήματος. Στον πέμπτο τύπο ΣΟΕΑ οι μαθητές μπορούν να «συγκρίνουν σύμβολα μεταξύ τους, να διερευνούν ομοιότητες και διαφορές και να προσανατολίζονται στη σημασία των συμβόλων» (Dina van Hiele *οπ. αναφ.* στο Fuys et al., 1984, p.221). Να κατανοούν δηλαδή μια ειδικότερη δομή ως γενικότερη με κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Ο τύπος αυτός χαρακτηρίζεται από την αναγνώριση των κοινών χαρακτηριστικών των διαγραμμάτων από κάποιες από τις ιδιότητές του ή κάποια χαρακτηριστικά του και η έννοια της απόδειξης διαμορφώνεται μέσω της ανάλυσης του διαγράμματος και της νοητικής σύνδεσης με τους τύπους ΣΟΕΑ που έχουν προηγουμένως

διερευνηθεί. Στόχος είναι η αναπαραστατική σύνθεση του πρώτου-τέταρτου τύπου να οδηγήσει στην ικανότητα εφαρμογής της λύσης με παραγωγικό συλλογισμό.

Συζήτηση

Σύμφωνα με τον Gravemeijer (2004), «είναι αναγκαίος ένας εκπαιδευτικός σχεδιασμός που θα υποστηρίξει τη διδασκαλία ώστε οι μαθητές να μπορέσουν να αναπτύξουν τον τρόπο αιτιολόγησής τους» (p. 106). Η επίδραση στους μαθητές των ημιπροκατασκευασμένων διαγραμμάτων ΣΟΕΑ των προβλημάτων που έχουν προαναφερθεί, έχει αναφερθεί σε αρκετά ελληνικά και διεθνή έγκριτα επιστημονικά συνέδρια και περιοδικά (π.χ. Patsiomitou, 2008a, b, 2010, 2011, 2012; Patsiomitou & Emvalotis, 2009, 2010): (α) οι βοηθητικές ενδιάμεσες γραμμές που εμφανίζονται σταδιακά βοηθούν το μαθητή να εστιάσει στο στόχο (β) πλεονεκτούν έναντι των προκατασκευασμένων διαγραμμάτων, αφού οι μαθητές μπορούν να ενεργήσουν σ' αυτά (γ) παρέχουν την καθοδήγηση που είναι αναγκαία είτε επιβεβαιώνοντας, είτε προβλέποντας τις γνωστικές διαδικασίες των μαθητών.

	<p>Σχήμα 8 (αριστερά): Παράδειγμα μοντελοποίησης του Πυθαγόρειου θεωρήματος μέσω Συνδεόμενων Οπτικών Αναπαραστάσεων από μαθήτρια της ερευνήτριας (15ο Γυμνάσιο Αθηνών) μετά την επίδραση με ΣΟΕΑ του λογισμικού (Πατσιομίτου, 2009).</p>
<p>Σχήμα 9 (δεξιά): Παραδείγματα μοντελοποίησης του Πυθαγόρειου θεωρήματος μέσω Συνδεόμενων Οπτικών Αναπαραστάσεων από μαθητές της ερευνήτριας (1ο Πειραματικό Γυμνάσιο Αθηνών), μετά την επίδραση με ΣΟΕΑ του λογισμικού (στην εικόνα δεξιά εργάστηκαν οι μαθητές: Ι. Αριανούτσος, Αλ. Βεντούρας, Μ. Δάβου και Σ. Καφριτσα-Γεωργαντά). Ανάρτηση των εργασιών στο διαδίκτυο στις 10/3/2012 http://eclass.sch.gr/courses/G10111</p>	

Αυτό που επισημαίνεται είναι ότι ένα τεχνολογικό εργαλείο είναι σημαντικό, όπως και ο σχεδιασμός τεχνουργημάτων με αυτό, όταν τα αποτελέσματα στη διδακτική πράξη επαναλαμβάνονται σε οποιαδήποτε ομάδα μαθητών και μπορούν να γενικευθούν σε οποιοδήποτε θεματικό πλαίσιο εφαρμόζονται και σε διαφορετικές χρονικές περιόδους. Η μοντελοποίηση για παράδειγμα του Πυθαγόρειου θεωρήματος μέσω της έννοιας των ΣΟΕΑ από την ερευνήτρια και η αλληλεπίδραση με αυτές από μαθητές της Β τάξης Γυμνασίου, οδήγησε τους μαθητές να αναπτύξουν συνδεόμενες οπτικές αναπαραστάσεις των ιδεών τους στο χαρτί. Το αποτέλεσμα δηλαδή ήταν πολλαπλές συνδεόμενες αναπαραστάσεις (λεκτικές, εικονικές και συμβολικές) σε διαφορετικές μορφές της απόδειξης του Πυθαγόρειου θεωρήματος (Σχήματα 8, 9) αν και εφαρμόστηκαν σε διαφορετικές χρονικές περιόδους (π.χ., Πατσιομίτου, 2009) και σε διαφορετικές ομάδες μαθητών. Στην αναζήτηση επομένως ενός μέσου που θα παίξει ιδιαίτερο ρόλο στην αναδιοργάνωση του τρόπου σκέψης των μαθητών αναφορικά με την ανάπτυξη της σταδιακής ικανότητας αναγνώρισης των σχέσεων των υποσημάτων αλλά και της εννοιολογικής μεταξύ τους σύνδεσης καθώς και τη διατύπωση

λογικοπαραγωγικών επιχειρημάτων, οι ΣΟΕΑ που μπορεί να δημιουργήσει ένας δάσκαλος [προκειμένου να μοντελοποιήσει ένα πρόβλημα ή μια θεωρία με τεχνολογικά εργαλεία], δίνει τη λύση στην καθημερινή πρακτική της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην τάξη, **συνδέοντας τη θεωρία των Μαθηματικών αποτελεσματικά με την πράξη.**

Αναφορές

- De Villiers, M. (1999). Mathematical treasure hunting. *KZN Math Journal*, 4(2), Nov, 23-28 and *Proceedings of AMESA 2000*, Univ. Free State, 271-276.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (Eds.). (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. Brooklyn: Brooklyn College. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 287 697).
- Gamow, G. (1988). *One, two, three--infinity*. New York: Dover Publications. (Original work published 1947)
- Gravemeijer, K. P. E. (2004). *Creating Opportunities for Students to Reinvent Mathematics*. Paper presented at ICME 10, Copenhagen, Denmark. July 4-11
- González G., Herbst P. (2009) Students' conceptions of congruency through the use of dynamic geometry software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 14 (2) 153-182.
- Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* [Computer Software]. Berkeley, CA: Key Curriculum Press
- Olivero, F. (2002). *The proving process within a dynamic geometry environment*. PhD thesis, Bristol, UK : University of Bristol, Graduate School of Education
- Patsiomitou, S. (2008a). The development of students' geometrical thinking through transformational processes and interaction techniques in a dynamic geometry environment. *Issues in Informing Science and Information Technology Journal*, 5, 353-393. Available on line <http://iisit.org/IssuesVol5.htm>
- Patsiomitou, S., (2008b) Linking Visual Active Representations and the van Hiele model of geometrical thinking. In Yang, W-C, Majewski, M., Alwis T. and Klairree, K. (Eds.) *Proceedings of the 13th Asian Conference in Technology in Mathematics*. pp 163-178. ISBN 978-0-9821164-1-8. Bangkok, Thailand. Available on line <http://atcm.mathandtech.org/EP2008/pages/regular.htm>
- Patsiomitou, S. (2010). Building LVAR (Linking Visual Active Representations) modes in a DGS environment. *Electronic Journal of Mathematics and Technology*, 4(1), 1-25.
- Patsiomitou (2011) Theoretical dragging: A non-linguistic warrant leading to dynamic propositions. In Ubuz, B (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 361-368. Ankara, Turkey: PME
- Patsiomitou (2012) A Linking Visual Representation DHLP for student's cognitive development. *Global Journal Of Computer Science and Technology*. 12 (6), 53-82.
- Patsiomitou, S., & Emvalotis A. (2009). Does the Building and transforming on LVAR modes impact students way of thinking? In M.Tzekaki, Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 4, pp. 337-344). Thessaloniki, Greece: PME.
- Patsiomitou, S & Emvalotis, A. (2010). The development of students' geometrical thinking through a DGS reinvention process. In M. Pinto, & Kawasaki, T. (Eds), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 33-40), Belo Horizonte. Brazil: PME.
- Senk, S. (1989). The van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321.
- Sedig, K., & Sumner, M. (2006). Characterizing interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11, 1-55.
- Scher, D. (2003). Dynamic visualization and proof: A new approach to a classic problem. *The mathematics Teacher*, 96(6), 394.
- Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. New York: Academic Press.
- Πατσιομίτου, Σ. (2009) Οπτική απόδειξη μέσω της ανασύνθεσης ισοδυνάμων σχημάτων σε λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Πρακτικά 5^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου ΤΠΕ, με τίτλο: «Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη διδακτική πράξη», σελ. 592-600. Σύρος.