

# Αναπαραστάσεις παιδιών για έννοιες πιθανοτήτων: Χρήση του μικρόκοσμου Toontalk

Γιάννα Σιριβιανού, Νίκος Βαλανίδης  
[sirivianou.yianna@ucy.ac.cy](mailto:sirivianou.yianna@ucy.ac.cy), [nichri@ucy.ac.cy](mailto:nichri@ucy.ac.cy)  
Πανεπιστήμιο Κύπρου

## Περίληψη

Η παρούσα εργασία προτείνει ένα μοντέλο εξέτασης, ανάλυσης και οικοδόμησης της πιθανολογικής σκέψης παιδιών (προδημοτικής και κατώτερης δημοτικής εκπαίδευσης) με τη χρήση ενός δυναμικού και σύνθετου ηλεκτρονικού περιβάλλοντος μάθησης. Στο περιβάλλον αυτό, δυάδες παιδιών κλήθηκαν να παίξουν τέσσερα παιχνίδια τύχης, τα οποία περιλαμβάνουν περιπτώσεις ανεξάρτητων ενδεχομένων και περιπτώσεις πιθανότητας υπό συνθήκη. Παρουσιάζονται οι αρχικές και οι αναδυόμενες αναπαραστάσεις σε θέματα πιθανοτήτων μίας δυάδας παιδιών της Α' τάξης του δημοτικού και εξετάζεται η συμβολή των εργαλείων του μικρόκοσμου ToonTalk στην ανάπτυξη βελτιωμένων μορφών αναπαραστάσης και σταδιακής μετάβασης σε αποδεκτά μαθηματικά πρότυπα.

**Λέξεις κλειδιά:** μικρόκοσμος, παιχνίδι, πιθανολογική σκέψη, πιθανότητα υπό συνθήκη, ToonTalk

## Εισαγωγή

Ο παράγοντας τύχη και η έννοια της πιθανότητας αποτελούν μέρος της καθημερινότητας (σε τυχερά παιχνίδια, σε διάφορες κληρώσεις, κ.ά.) και επομένως η σχετική ορολογία χρησιμοποιείται ευρέως από μικρούς και μεγάλους. Οι έρευνες όμως εντόπισαν και σημαντικές παρανοήσεις που δυσκολεύουν την κατανόηση των πιθανοτήτων (Piaget & Inhelder, 1975; Fischbein & Gazit, 1984; LeCourte, 1992), ενώ οι παρανοήσεις αυτές διατηρούνται ακόμη και μετά από τη σχετική διδασκαλία (Fischbein, 1975; Konold, 1989). Οι περισσότερες από τις έρευνες αυτές πρότειναν ένα μεθοδολογικό σχεδιασμό κατά τον οποίο καταγράφονται 'στιγμιότυπα' (Pratt, 2000) από τις απαντήσεις των παιδιών σε συγκεκριμένα προβλήματα που δίνονται σε χαρτί, περιορίζοντας έτσι τη δυνατότητα διερεύνησης των επιδράσεων άλλων πτυχών του περιβάλλοντος μάθησης.

Σύμφωνα με την Carragher (1989), η οργάνωση της μαθηματικής γνώσης δεν εξαρτάται μόνο από το σύνολο των νοημάτων που οικοδομεί ο ανθρώπινος νους, αλλά και από τους στόχους για τους οποίους τα νοήματα αυτά οικοδομούνται. Η Lave (1988) υποστήριξε επίσης ότι το περιβάλλον στο οποίο οικοδομείται η γνώση παίζει βασικό ρόλο στα γνωστικά σχήματα που δημιουργούνται, με αποτέλεσμα αυτά να είναι άμεσα συνδεδεμένα με αυτό. Με βάση αυτήν την προοπτική, οι παρανοήσεις στην πιθανολογική σκέψη των παιδιών μπορεί να οφείλονται στις καθημερινές τους εμπειρίες με θέματα πιθανοτήτων και στη δημιουργία γνωστικής αναντιστοιχίας με όσα διδάσκονται και τον τρόπο που διδάσκονται στο σχολικό περιβάλλον, αφού διαφορετικές εμπειρίες μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικά γνωστικά σχήματα. Ο συνδυασμός εργαλείων, που δεν υπάρχουν στην καθημερινότητα των παιδιών αλλά χρησιμοποιούνται σε δυναμικά περιβάλλοντα διδασκαλίας και αλληλεπίδρασης που βασίζονται στις νέες τεχνολογίες, μπορεί να προσφέρει χρήσιμες εμπειρίες για τις πιθανότητες που έχουν νόημα για τα παιδιά. Αυτό μπορεί να υποβοηθήσει την εξέταση και την ανάπτυξη των διαισθητικών αντιλήψεων των

παιδιών για τις αντίστοιχες έννοιες (Pratt, 2000; Wilensky, 1993), ώστε να αναπτύσσεται σταδιακά και ευκολότερα η πιθανολογική σκέψη τους.

Η παρούσα εργασία αποσκοπούσε να διερευνήσει και να αξιολογήσει τη συμβολή συγκεκριμένων εργαλείων του μικρόκοσμου ToonTalk στην ανάπτυξη βελτιωμένων μορφών αναπαράστασης και σταδιακής μετάβασης σε αποδεκτά μαθηματικά πρότυπα, όταν τα εργαλεία αυτά αξιοποιούνται διερευνητικά από παιδιά προ-δημοτικής ή κατώτερης δημοτικής εκπαίδευσης.

## **Θεωρητικό Υπόβαθρο**

### **Μικρόκοσμοι και Πιθανότητες**

Αρκετοί ερευνητές θεωρούν ότι το μαθησιακό περιβάλλον (ως ο συνδυασμός δυναμικών μικρόκοσμων, εργαλείων και δραστηριοτήτων) διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της πιθανολογικής σκέψης των μαθητών και εστιάζουν τις προσπάθειές τους στη δημιουργία σύνθετων περιβαλλόντων μάθησης με σκοπό να αναλύσουν και να εμπλουτίσουν τα διαισθητικά μοντέλα των παιδιών (Pratt, 2000; Drier, 2001; Paparistodemou & Noss, 2003; Sirivianou, 2006). Μέσα από τα περιβάλλοντα αυτά, τα παιδιά έχουν την ευκαιρία να διερευνούν τις αντιλήψεις τους, να κάνουν εικασίες, να αναπτύξουν την ικανότητα αιτιολόγησης, να οικοδομούν νέες αναπαραστάσεις και να οδηγούνται σε γενικεύσεις (Papert, 1980). Οι διαπιστώσεις αυτές οδήγησαν στη δημιουργία μικρόκοσμων με σκοπό να μελετηθεί η διαμόρφωση της πιθανολογικής σκέψης των παιδιών.

Ο Pratt (2000), για παράδειγμα, σχεδίασε και ανέπτυξε το μικρόκοσμο Παραγωγής Ευκαιριών (Chance-Maker) σε περιβάλλον BOXER. Ο μικρόκοσμος αυτός περιλαμβάνει προσομοιώσεις φυσικών στοχαστικών πειραμάτων, όπως η ρίψη κέρματος, η ρουλέτα με βελάκι, το ζάρι, το ζεύγος ζαριών κ.ά. Η μελέτη του Pratt (2000) έδειξε ότι παιδιά, ηλικίας 10 με 11 χρονών, οικοδομούν βελτιωμένες αναπαραστάσεις στις πιθανότητες με τη χρήση του μικρόκοσμου, αλλά και ότι οι αναπαραστάσεις αυτές είναι άμεσα συνδεδεμένες με το περιβάλλον στο οποίο οικοδομούνται. Σε μια άλλη έρευνα, η Drier (2001) μελέτησε παιδιά ηλικίας 8 με 9 χρονών ενώ αλληλεπιδρούσαν με το μικρόκοσμο Διερευνητής Πιθανοτήτων (Probability Explorer). Η προσέγγιση της Drier (2001) στηρίχτηκε κυρίως στη χρήση πολλαπλών στατικών ή/και δυναμικών αναπαραστάσεων που διευκολύνουν τη διερεύνηση των στοχαστικών φαινομένων. Τα παιδιά στη μελέτη αυτή είχαν την ευκαιρία να διερευνούν το δειγματικό χώρο σε σχέση με ανεξάρτητα και εξαρτημένα ενδεχόμενα και να αναπαριστούν τις πιθανότητες σε κλασματική μορφή.

Οι Paparistodemou και Noss (2003), στη δική τους έρευνα, ασχολήθηκαν με παιδιά ηλικίας 5 με 8 χρονών, ενώ αλληλεπιδρούσαν με το μικρόκοσμο Διαδρομών (Pathways) στον οποίο ένα σωματίδιο αναπηδά μέσα σε ένα δοχείο και η σύγκρουση του σωματιδίου σε κάποιο από τα σταθερά σωματίδια του περιβάλλοντος προκαλεί την αύξηση ή τη μείωση του ύψους της πορείας ενός «διαστημόπλοιου.» Οι ερευνητές ανέφεραν ότι τα παιδιά στην αρχή έψαχναν για μοτίβα και τρόπους να ελέγχουν την τυχαία συμπεριφορά έτσι ώστε να προβλέπουν το επόμενο αποτέλεσμα, αλλά σταδιακά το ενδιαφέρον τους επικεντρώθηκε στον έλεγχο του αποτελέσματος με αλλαγές στο δειγματικό χώρο.

Η Sirivianou (2006) χρησιμοποίησε το μικρόκοσμο ToonTalk, για να κατασκευάσει εργαλεία και παιχνίδια για παιδιά 11 με 12 χρονών. Τα εργαλεία αναπαριστούν το δειγματικό χώρο για ανεξάρτητα και εξαρτημένα ενδεχόμενα, ενώ παρέχουν τη δυνατότητα τροποποίησης με σκοπό τη δημιουργία παιχνιδιών 'τύχης.' Στο περιβάλλον αυτό, τα παιδιά έπαιζαν σε δυάδες, παιχνίδια 'τύχης' και εργάστηκαν ατομικά για να κατασκευάσουν το δικό τους παιχνίδι 'τύχης,' χρησιμοποιώντας τα εργαλεία του μικρόκοσμου. Η μελέτη έδειξε

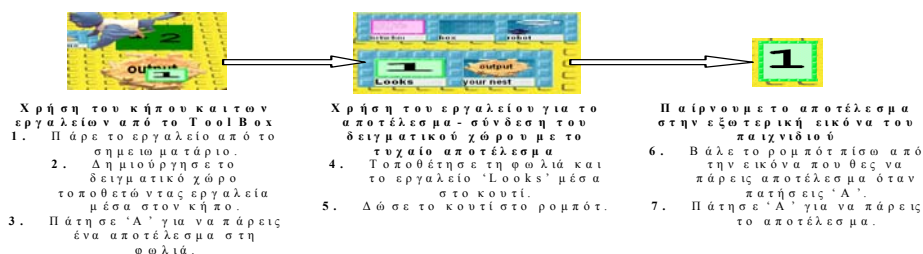
ότι τα παιδιά οικοδομούν προοδευτικά βελτιωμένες μαθηματικές αναπαραστάσεις για έννοιες των πιθανοτήτων, εγκαταλείποντας τις διαισθητικές τους αντιλήψεις.

Από προηγούμενες έρευνες, φάνηκε επίσης ότι η εμπλοκή των παιδιών με ηλεκτρονικούς μικρόκοσμους και με προσεχτικά σχεδιασμένα εργαλεία μπορεί να τα φέρει αντιμέτωπα με τις αρχικές διαισθητικές τους αντιλήψεις και να τα οδηγήσει στην οικοδόμηση βελτιωμένων αντιλήψεων για τις πιθανότητες. Στην παρούσα εργασία, έγινε προσπάθεια προσαρμογής του μικρόκοσμου ToonTalk και των εργαλείων του στις πιθανότητες (Sirivianou, 2006), έτσι ώστε να είναι δυνατός ο εντοπισμός των αντιλήψεων των παιδιών προ-δημοτικής και κατώτερης δημοτικής εκπαίδευσης στις πιθανότητες, καθώς και η καταγραφή νέων βελτιωμένων αναπαραστάσεων για έννοιες των πιθανοτήτων.

### Ο Μικρόκοσμος Προγραμματισμού ToonTalk

Το λογισμικό ToonTalk μοιάζει με ηλεκτρονικό παιχνίδι και βασίζεται στη χρησιμοποίηση κώδικα κινούμενων εικόνων προγραμματισμού (animated code), στοιχείο που το καθιστά κατάλληλο για χρήση από παιδιά (Kahn, 1999). Στο παιχνίδι αυτό περιβάλλον, οι μαθητές μπορούν να δημιουργούν τους κανόνες και τις αρχές λειτουργίας του μικρόκοσμου χρησιμοποιώντας οπτικά εργαλεία.

Ο μικρόκοσμος ToonTalk χρησιμοποιήθηκε για τις ανάγκες της παρούσας έρευνας, γιατί παρέχει ευκαιρίες για τη δημιουργία ενός *αυτό-εκφραζόμενου* ηλεκτρονικού περιβάλλοντος (Noss κ.α., 1997), ή «ενός περιβάλλοντος όπου ο χρήστης πρέπει να εκφράζει και να κατανοεί τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων και των εργαλείων του, για να είναι σε θέση να δημιουργεί και να επεξεργάζεται νέα αντικείμενα» (σελ. 207). Έτσι, τα εργαλεία τα οποία δημιουργούνται παρέχουν τρόπους σύνδεσης και ανάλυσης εννοιών. Ο δειγματικός χώρος αναπαριστάται από ένα χώρο (στα παιδιά παρουσιάζεται ως 'κήπος') στον οποίο τοποθετούνται αντικείμενα, ενώ το αποτέλεσμα μια τυχαίας επιλογής αναπαριστάται από ένα δεύτερο εργαλείο το οποίο οι μαθητές συνδέουν με το δειγματικό χώρο και το οποίο ενεργοποιείται κάθε φορά με το πάτημα κάποιου γράμματος, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Η σύνδεση επιτυγχάνεται με τη χρήση ενός εργαλείου που μοιάζει με 'φωλιά' (message receiving) στην οποία ένα 'πουλί' (message sending) τοποθετεί το τυχαίο αποτέλεσμα που παίρνει από τον 'κήπο' (sample space). Όλα τα εργαλεία βρίσκονται σε ένα ειδικά διαμορφωμένο 'σημειωματάριο' (notebook) για εύκολη πρόσβαση και χρήση από τα παιδιά.



Σχήμα 1. Τα Εργαλεία Προγραμματισμού του Μικρόκοσμου Toontalk

### Μεθοδολογία

Στην έρευνα έλαβαν μέρος δυάδες παιδιών από την προ-δημοτική εκπαίδευση (ηλικίας 5 χρονών) και από την πρώτη τάξη του δημοτικού (ηλικίας 6 χρονών). Η κάθε δυάδα είχε τέσσερις συναντήσεις διάρκειας σαράντα λεπτών η κάθε μια, όπου τα παιδιά είχαν την

ευκαιρία να παίξουν τρία παιχνίδια τύχης και να εργαστούν για την ολοκλήρωση ενός τέταρτου μισο-τελειωμένου παιχνιδιού. Για την καλύτερη και λεπτομερή ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνας, οι μελέτες περίπτωσης των δυάδων οπτικογραφήθηκαν, ενώ κατά τη διάρκεια των παιχνιδιών έγιναν συνεντεύξεις για τα έργα, οι οποίες είχαν στόχο να αναδείξουν τις διαισθητικές και τις αναδυόμενες αναπαραστάσεις των μαθητών.

### Αποτελέσματα

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι διαισθητικές και αναδυόμενες αναπαραστάσεις των παιδιών μίας μόνο δυάδας της Α' τάξης δημοτικού (Παναγής και Στέλλα) στα τρία από τα τέσσερα παιχνίδια που δημιουργήθηκαν για τους σκοπούς της έρευνας, αφού η ανάλυση όλων των δεδομένων δεν έχει ολοκληρωθεί.

### Χρωματιστές Μπάλες

Το παιχνίδι 'χρωματιστές μπάλες' δημιουργήθηκε με σκοπό να εισάγει τα παιδιά στο μικρόκοσμο και να διερευνήσει τις αρχικές τους αντιλήψεις για ένα δειγματικό χώρο, που περιέχει 4 άσπρες μπάλες (ποδοσφαίρου) και 2 κόκκινες, όταν τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2. Τα παιδιά επιλέγουν από ένα είδος μπάλας (χρώμα) και χρησιμοποιούν το γράμμα 'Α,' για να πάρουν ένα αποτέλεσμα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούν τις μεταφορές (τους χαρακτηριστικές-κινούμενα σχέδια του μικρόκοσμου που λειτουργούν με κώδικα κινούμενων εικόνων και μπορούν να εκτελούν διάφορες εντολές, όπως αντιγραφή, επικόλληση κ.ά.) και τα εργαλεία του μικρόκοσμου για να τοποθετούν στον πίνακα κάθε αποτέλεσμα που παίρνουν, δημιουργώντας έτσι μια γραφική παρουσίαση για το σύνολο των τυχαίων αποτελεσμάτων.



Σχήμα 2. Το Πρώτο Παιχνίδι 'Χρωματιστές Μπάλες'

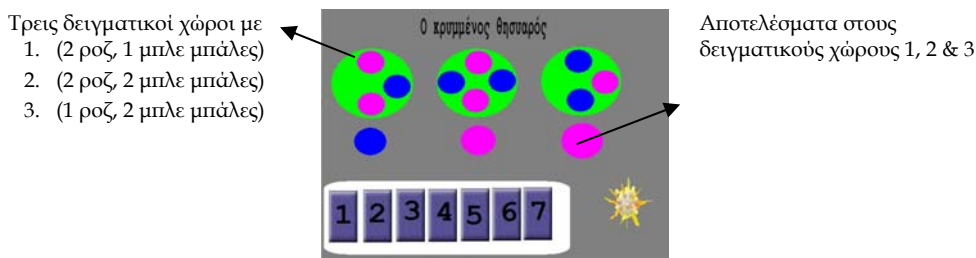
Αρχικά τα παιδιά επέλεξαν με ποια μπάλα ήθελαν να παίξουν, σύμφωνα με το χρώμα που προτιμούσαν, αγνοώντας το δειγματικό χώρο και υποστήριξαν ότι το δικό τους χρώμα θα εμφανιστεί στα αποτελέσματα. Σε τέσσερις άσπρες μπάλες και μηδέν κόκκινες μπάλες που πήραν στα αποτελέσματα, ο Παναγής υποστήριξε ότι αυτό συνέβηκε, γιατί 'στον κήπο έχει περισσότερες άσπρες μπάλες.' Όταν το αποτέλεσμα τροποποιήθηκε σε τέσσερις άσπρες μπάλες και δύο κόκκινες, η Στέλλα παρατήρησε ότι η συχνότητα των αντικειμένων στα αποτελέσματα είναι ίδια με εκείνη στο δειγματικό χώρο και πρόβλεψε ότι το επόμενο σύνολο αποτελεσμάτων θα είναι τέσσερις άσπρες μπάλες και δύο κόκκινες. Παρόλο που η ερμηνεία των παιδιών για το σύνολο των αποτελεσμάτων παρουσίασε μια αρχική σύνδεση μεταξύ του δειγματικού χώρου και των αποτελεσμάτων, αυτή η σύνδεση δεν ήταν ισχυρή όταν τα παιδιά έκαναν προβλέψεις για το επόμενο αποτέλεσμα. Σε αυτήν την περίπτωση, τα παιδιά επικεντρώθηκαν στο αποτέλεσμα και προσπαθούσαν να προβλέψουν τι θα ακολουθήσει, χρησιμοποιώντας διαισθητικά -αιτιολογικά μοντέλα: Για παράδειγμα, 'Το

επόμενο αποτέλεσμα θα είναι κόκκινη μπάλα, γιατί δεν έχει άλλο ελεύθερο χώρο στον πίνακα για τις άσπρες μπάλες, ή 'θα πάρουμε κόκκινη μπάλα, για να εξισορροπήσουν οι μπάλες μας στον πίνακα' και 'τα αποτελέσματα ακολουθούν μοτίβο.'

Μιλώντας για το σύνολο των αποτελεσμάτων στο τέλος του παιχνιδιού, τα παιδιά κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι 'πήραμε περισσότερες άσπρες μπάλες, γιατί οι άσπρες μπάλες είναι περισσότερες από τις κόκκινες στον κήπο, έτσι ο υπολογιστής είναι πιο πιθανόν (πιθανότερο) να διαλέξει άσπρη μπάλα.'

### Ο Κρυμμένος Θησαυρός

Στο παιχνίδι του 'κρυμμένου θησαυρού,' τα παιδιά διαλέγουν αρχικά το χρώμα (ροζ ή μπλε) με το οποίο θέλουν να παίξουν. Στη συνέχεια, μπορούν να επιλέγουν μεταξύ των τριών ρουλετών ώστε να αυξάνεται η πιθανότητα να πάρουν το χρώμα τους και να την ενεργοποιήσουν πατώντας τα γράμματα 'Α,' 'Β' και 'Γ' του πληκτρολογίου του υπολογιστή, αντίστοιχα. Αν φέρουν το χρώμα τους, τότε χρησιμοποιούν την εντολή διαγραφή (Delete) για να ανοίξει τυχαία μία από τις επτά πόρτες στο κάτω μέρος του παιχνιδιού (Σχήμα 3) με σκοπό να βρουν τον κρυμμένο θησαυρό που κρύβεται σε μία από αυτές. Αν μετά την επιλογή της ρουλέτας, φέρουν το χρώμα του αντιπάλου τους, τότε παίζει στη θέση του πρώτου παιδιού το δεύτερο (ο αντίπαλος) και το πρώτο χάνει τη σειρά του στο παιχνίδι.



Σχήμα 3. Το Τρίτο Παιχνίδι, 'Ο Κρυμμένος Θησαυρός'

Στο παιχνίδι αυτό, τα παιδιά σύγκριναν οπτικά τις πιθανότητες να φέρουν ροζ ή μπλε μπάλα μεταξύ τριών δειγματικών χώρων. Η Στέλλα, που έπαιζε με το ροζ χρώμα είπε ότι 'η πρώτη ρουλέτα είναι πιο καλή για μένα, αφού έχει 2 ροζ μπάλες και οι ροζ είναι περισσότερες από τις μπλε, άρα έχω μεγαλύτερες ευκαιρίες να φέρω το χρώμα μου,' ενώ ο Παναγής πήρε ανάλογη θέση για την τρίτη ρουλέτα και τις μπλε μπάλες. Όταν ρωτήθηκαν για τη δεύτερη ρουλέτα, τα παιδιά απάντησαν ότι 'υπάρχουν δύο μπλε και δύο ροζ μπάλες, άρα δεν μπορούμε να φέρουμε κάποιο συγκεκριμένο χρώμα, πρέπει να είσαι πολύ τυχερός για να φέρεις το χρώμα που θες.' Η στρατηγική που ακολούθησαν τα παιδιά ως προς την επιλογή της ρουλέτας φάνηκε να τους ικανοποιεί. Ακόμη και στις περιπτώσεις που δεν έφερναν το 'επιθυμητό' χρώμα στο αποτέλεσμα, τα παιδιά έκριναν ότι δεν ήταν 'τυχεροί αυτή τη φορά' και ξαναπροσπαθούσαν με την ίδια ρουλέτα. Για τη μεσαία ρουλέτα δήλωσαν ότι 'μάλλον τα αποτελέσματα σε αυτή θα ακολουθούν το μοτίβο ροζ, μπλε,' αλλά δεν έκαναν κάποια κίνηση για να το εξακριβώσουν.

Στην ερώτηση 'πόσο σίγουροι είστε ότι η πρώτη ή η τρίτη ρουλέτα θα φέρει το χρώμα σας,' τα παιδιά απάντησαν ότι 'δεν είναι αδύνατο να έρθει μπλε ή ροζ μπάλα, γιατί έχουμε και τα δύο χρώματα στις ρουλέτες, αλλά, επειδή στην πρώτη ρουλέτα υπάρχουν περισσότερες ροζ από μπλε μπάλες και στην τρίτη ρουλέτα περισσότερες μπλε από ροζ μπάλες, έχουμε περισσότερες ευκαιρίες να φέρουμε το χρώμα μας.'

### Διαδοχή Χρωμάτων

Στο παιχνίδι αυτό, τα παιδιά εμπλέκονται πιο ενεργά με τα εργαλεία και τις έννοιες των πιθανοτήτων, αφού καλούνται να δημιουργήσουν τρεις δειγματικούς χώρους, έτσι ώστε το αποτέλεσμα στα τρία κουτιά να είναι πιο πιθανό να έχει τη διαδοχή χρωμάτων κόκκινο-μπλε-κόκκινο. Συγκεκριμένα πίσω από το παιχνίδι υπάρχουν τρεις δειγματικοί χώροι που ο καθένας έχει (1 κόκκινη, 1 μπλε μπάλα). Το αποτέλεσμα από τον κάθε δειγματικό χώρο ενεργοποιείται με τα γράμματα 'Α', 'Β' και 'Γ' του πληκτρολογίου, αντίστοιχα, και φαίνεται στα κουτιά του παιχνιδιού (Σχήμα 4). Ο κάθε δειγματικός χώρος έχει αντικείμενα τα οποία αντικαθιστούνται σ' αυτόν κάθε φορά που γίνεται μια τυχαία επιλογή.



Τα παιδιά μπορούν να αλλάζουν τον αριθμό και τη σχέση των έγχρωμων αντικειμένων σε αυτούς

**Σχήμα 4. Το Τέταρτο Παιχνίδι, Διαδοχή Χρωμάτων**

Τα παιδιά, αφού έπαιξαν το παιχνίδι αρκετές φορές, δήλωσαν ότι *'είναι πολύ δύσκολο να κερδίσουμε σε αυτό το παιχνίδι, φαίνεται ότι δεν είμαστε πολύ τυχεροί τελικά.'* Στη συνέχεια, δείξαμε στα παιδιά το πίσω μέρος του παιχνιδιού με τους κρυμμένους δειγματικούς χώρους και ζητήθηκε από αυτά να σκεφτούν κατά πόσο θα μπορούσαν να αυξήσουν τις πιθανότητες τους να κερδίσουν, αν έκαναν αλλαγές στους δειγματικούς χώρους. Τα παιδιά αρχικά προσπάθησαν να αλλάξουν τη θέση των αντικειμένων μέσα στους 'κήπους,' υποστηρίζοντας ότι, *'η κόκκινη μπάλα τοποθετηθεί πιο πάνω από την μπλε, θα έρθει πιο εύκολα στα αποτελέσματα.'* Αν και αυτό δεν το επέτρεπαν οι κανονισμοί του παιχνιδιού, αφήσαμε τα παιδιά να πειραματιστούν και να εξετάσουν κατά πόσο η θέση τους αυτή ήταν σωστή. Τα παιδιά απογοητεύτηκαν, γιατί, όπως ισχυρίστηκαν, *'τελικά και με τις αλλαγές αυτές είναι δύσκολο να κερδίσουμε στο παιχνίδι'* και *'μάλλον το πού είναι τοποθετημένες οι μπάλες δεν παίζει ρόλο στο αποτέλεσμα.'* Ο Παναγής εισηγήθηκε να *'αφαιρέσουμε τη μπλε μπάλα από τον πρώτο κήπο'* και η Στέλλα συμφώνησε ότι *'έτσι θα είμαστε σίγουροι ότι μόνο κόκκινη μπάλα θα φέρουμε στο πρώτο αποτέλεσμα.'* Όταν ενημερώσαμε τα παιδιά ότι οι κανονισμοί του παιχνιδιού επιτρέπουν μόνο να προσθέσουμε και όχι να αφαιρέσουμε αντικείμενα από τους 'κήπους,' άρχισαν να σκέφτονται τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να αυξήσουν τις πιθανότητές τους να κερδίσουν.

- Π.: Οι μπάλες (1 κόκκινη, 1 μπλε) στους κήπους μας δίνουν τις ίδιες ευκαιρίες να φέρουμε και να μην φέρουμε το χρώμα μας.
- Σ.: Μπορούμε να προσθέσουμε 2 κόκκινες μπάλες στον πρώτο κήπο για να έχουμε περισσότερες ευκαιρίες να φέρουμε κόκκινο χρώμα στο πρώτο αποτέλεσμα.
- Ε.: Γιατί 2 κόκκινες μπάλες;
- Σ.: Μπορούμε να προσθέσουμε και περισσότερες.
- Π.: Όσο περισσότερες κόκκινες μπάλες προσθέσουμε, τόσες πιο πολλές ευκαιρίες θα έχουμε να φέρουμε το κόκκινο χρώμα στο πρώτο αποτέλεσμα.

Αφού διαμορφώθηκε ο πρώτος δειγματικός χώρος (3 κόκκινες και μία μπλε), τα παιδιά δοκίμασαν το πρώτο αποτέλεσμα αρκετές φορές. Αρχικά η Στέλλα περίμενε ότι τα αποτελέσματα θα ακολουθούσαν το μοτίβο (3 κόκκινες μπάλες, 1 μπλε μπάλα), αλλά όταν

έπαιξαν με το πρώτο αποτέλεσμα αρκετές φορές διαπίστωσε ότι *‘δεν ακολουθεί μοτίβο τελικά, αλλά τώρα έχουμε πολύ περισσότερες ευκαιρίες να φέρουμε κόκκινη παρά μπλε μπάλα.’* Τελικά, τα παιδιά άλλαξαν και τους τρεις δειγματικούς χώρους διαμορφώνοντας τον πρώτο σε 3 κόκκινες και μία μπλε μπάλα, τον δεύτερο σε 1 κόκκινη και 3 μπλε μπάλες και τον τρίτο σε 3 κόκκινες και μία μπλε μπάλα. Σε κάθε δειγματικό χώρο που διαμόρφωναν, δοκίμαζαν τις αλλαγές στο παιχνίδι και έδειχναν ικανοποιημένοι από τον τρόπο που αύξησαν τις *‘ευκαιρίες’* τους να κερδίσουν.

Στη συζήτηση που ακολούθησε, τα παιδιά εισηγήθηκαν διάφορους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να διευκολύνουν ή να δυσκολέψουν τους παίχτες. Δήλωσαν, για παράδειγμα, ότι *‘αν θέλαμε να κάνουμε πιο δύσκολο το παιχνίδι, θα προσθέταμε περισσότερες μπλε από κόκκινες μπάλες στον πρώτο κήπο, περισσότερες κόκκινες από μπλε μπάλες στο δεύτερο και περισσότερες μπλε από κόκκινες μπάλες στον τρίτο κήπο’*. Αν και η επιχειρηματολογία τους περιορίστηκε σε *‘επιθυμητά’* και *‘μη επιθυμητά’* σύνολα, τα παιδιά έδειξαν να συνδέουν τη συχνότητα των αντικειμένων στο δειγματικό χώρο με την πιθανότητα να πάρουν κάποιο αποτέλεσμα. Σε αυτό το παιχνίδι, τα παιδιά μπορούσαν να συγκρίνουν τις πιθανότητές τους να κερδίσουν σε διαφορετικούς δειγματικούς χώρους, ενώ ταυτόχρονα μπορούσαν να τροποποιούν τους δειγματικούς χώρους με σκοπό να αυξάνουν τις πιθανότητες αυτές.

### Συζήτηση

Η εκπαιδευτική έρευνα σχετικά με τη διδασκαλία των πιθανοτήτων σε παιδιά μικρής ηλικίας έδειξε ότι είναι σημαντικό τα παιδιά να αποκτούν εμπειρίες στις πιθανότητες, ώστε να αναπτύσσουν σταδιακά τυπική πιθανολογική σκέψη, ενώ μπορούν να βελτιώνουν τα διαισθητικά τους μοντέλα, τουλάχιστον όσο αφορά το δίκαιο παιχνίδι (Tatsis, Kafoussi & Skoumpourdi, 2008). Στην έρευνα, συνοψίστηκε το θεωρητικό πλαίσιο και έγινε παρουσίαση των εργαλείων που δημιουργήθηκαν με σκοπό να διερευνηθεί η πιθανή ανάπτυξη της πιθανολογικής σκέψης σε παιδιά προ-δημοτικής και κατώτερης δημοτικής εκπαίδευσης. Η εργασία επικεντρώθηκε μόνο στην παρουσίαση των διαισθητικών και αναπαινώμενων αναπαραστάσεων μιας δυάδας παιδιών της Α΄ τάξης του δημοτικού.

Οι συζητήσεις των παιδιών έδειξαν ότι στις αρχικές τους αντιλήψεις ήταν αρκετά εδραιωμένη η αιτιολογική φύση των πραγμάτων, κάτι που τους έκανε να επικεντρώνονται είτε στα αποτελέσματα, αναμένοντας κάποιο μοτίβο, είτε στον *‘κήπο’* (δειγματικό χώρο), αφού έδιναν έμφαση στην τοποθέτηση των αντικειμένων μέσα σε αυτόν. Αν και τα εργαλεία του μικρόκοσμου (ο δειγματικός χώρος, η συχνότητα των αντικειμένων μέσα σε αυτόν και τα αποτελέσματα) ήταν εμφανή στα παιδιά, με σκοπό να διευκολύνεται η οικοδόμηση συνδέσεων μεταξύ τους, η σύνδεση δε γινόταν αμέσως αντιληπτή. Οι θέσεις που σίγουρα υποδηλώνουν σύνδεση μεταξύ των εργαλείων του μικρόκοσμου και συνήθως εμφανίζονται στα αρχικά στάδια οικοδόμησης της πιθανολογικής σκέψης (Sirivianou, 2006), όπως, για παράδειγμα, η θέση ότι *‘το αντικείμενο, που έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα στο δειγματικό χώρο, είναι πιο πιθανό να εμφανιστεί στα αποτελέσματα’* και η προέκτασή της στη θέση ότι *‘τα αντικείμενα, που παρουσιάζουν την ίδια συχνότητα στο δειγματικό χώρο, έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν στα αποτελέσματα’*, δεν ήταν τόσο ισχυρές στις αρχικές διατυπώσεις των παιδιών. Τα διαισθητικά και αιτιολογικά μοντέλα των παιδιών επανέρχονταν όμως στις περιπτώσεις που οι προβλέψεις τους δεν επαληθεύονταν.

Στο τρίτο παιχνίδι, τα παιδιά έδειξαν να δίνουν προτεραιότητα στη σύνδεση μεταξύ των εργαλείων του μικρόκοσμου και να ακολουθούν τη θέση αυτή ως σταθερή στρατηγική, για να αυξήσουν τις πιθανότητές τους να φέρουν το χρώμα τους και να ανοίξουν μία από τις επτά πόρτες. Το διαισθητικό μοντέλο που αφορούσε την τοποθέτηση των αντικειμένων στο δειγματικό χώρο επανήλθε στο τέταρτο παιχνίδι, όπου τα παιδιά είχαν την ευκαιρία να το

εξετάσουν παρεμβαίνοντας στο δειγματικό χώρο και να το απορρίψουν τελικά. Αν και τα παιδιά περιορίστηκαν στο να συγκρίνουν 'επιθυμητά' και 'μη επιθυμητά' σύνολα στο δειγματικό χώρο, αγνοώντας το σύνολο των αντικειμένων σε αυτόν, ήταν όμως σε θέση να παρεμβαίνουν στους τρεις δειγματικούς χώρους, τοποθετώντας αντικείμενα μέσα σε αυτούς, και να επιχειρηματολογούν για τις διαφοροποιημένες 'ευκαιρίες' που έδιναν στους παίχτες του παιχνιδιού.

Συμπερασματικά, ο μικρόκοσμος παρείχε στα παιδιά δυνατότητες διερεύνησης και πειραματισμού των αρχικών διαισθητικών τους μοντέλων, και τα βοήθησε στην κατανόηση και σύνδεση των κανόνων και των βασικών στοιχείων των πιθανοτήτων. Η αλληλεπίδραση των παιδιών με τα εργαλεία του μικρόκοσμου τους έδινε έτσι τη δυνατότητα να οικοδομούν συνδέσεις μεταξύ του δειγματικού χώρου και της πιθανότητας να πάρουν ένα αποτέλεσμα. Όπως υποστήριζαν διάφοροι ερευνητές (Lave, 1988; Carraher, 1989; Pratt, 2000; Sirivianou, 2006), τα γνωστικά σχήματα που δημιουργούνται είναι άμεσα συνδεδεμένα με το περιβάλλον στο οποίο οικοδομούνται και τους στόχους που τίθενται από τα παιδιά (π.χ., να ανακαλύψουν στρατηγικές οι οποίες θα τους βοηθούν να κερδίζουν στα παιχνίδια). Η παρούσα έρευνα δείχνει ότι η δημιουργία *αυτό-εκφραζόμενων* μικρόκοσμων (Noss et al., 1997) και η ενεργή αλληλεπίδραση των παιδιών με αυτούς αποτελεί κατάλληλη στρατηγική για τον εντοπισμό, την εξέταση και την τροποποίηση διαισθητικών μοντέλων για τις πιθανότητες και την πορεία και διαδικασία σταδιακής ανάπτυξης της τυπικής πιθανολογικής σκέψης και την οικοδόμηση αποδεκτών μαθηματικών μοντέλων.

### Αναφορές

- Carraher, T. N. (1989). Negotiating the results of mathematical computations. *International Journal of Educational Research*, 13, 627-646.
- Drier, H. S. (2001). Conceptualization and design of Probability Explorer: A research based journey towards innovative educational software. *Tech Trends*, 45 (2), 22-24
- Fischbein, E., & Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. D. Reidel: Dordrecht.
- Kahn, K. (1999). A computer game to teach programming. *Proceedings of the National Educational Computing Conference*. Retrieved 12 June 2010 from <http://www.toontalk.com/english/papers.htm>
- Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction*, 6, 59- 98.
- Lave, J. (1988). *Cognition in Practice*. Cambridge: Cambridge University Press.
- LeCoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in 'purely random' situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 557-568.
- Papariotodemou, E., & Noss, R. (2003). Design a task for expressing randomness. *Proceedings of the 6<sup>th</sup> International Conference on Computer-based Learning in Science (CBLIS 2003)* (pp. 694-700). Nicosia, Cyprus.
- Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of the idea of chance in children*. New York: Norton.
- Pratt, D. (2000). Making sense of the total of two dice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(5), 606-625.
- Sirivianou, Y. (2006). *Children's probabilistic thinking in a ToonTalk environment*. PhD Thesis, University of Leeds.
- Tatsis, K., Kafoussi, S., & Skoumpourdi, C. (2008). Kindergarten children discussing the fairness of probabilistic games: The creation of a primary discursive community. *Early Childhood Education*, 36, 221-226.
- Wilensky, U. (1993). *Connected mathematics: Building concrete relationships with mathematical knowledge*. PhD Thesis, Massachusetts Institute of Technology.