

Οι Πλακοστρώσεις στο Sketchpad v4 ως διαισθητικό θεμέλιο για την ανάπτυξη παραγωγικών συλλογισμών

Σ.Πατσιομίτου

Εκπ/κός Δ/θμιας Εκπ/σης, Med Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών ΕΚΠΑ,

Υπ. Διδάκτωρ Παν. Ιωαννίνων

spatsiomitou@sch.gr

Περίληψη

Οι κατασκευές πλακοστρώσεων σε ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας όπως το Geometer's Sketchpad παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, προσφέροντας στους μαθητές μια ευκαιρία να βιώσουν τη δημιουργική αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης. Οι κατασκευές αυτές στις διάφορες μορφές που παρουσιάζονται στην εργασία στην συνέχεια μπορούν να αποτελέσουν ένα σημαντικό διαισθητικό θεμέλιο για την ανάπτυξη λογικό-παραγωγικών επιχειρημάτων από τους μαθητές μέσα από την διαδικασία κατασκευών τους. Το σημαντικό είναι ότι με τις δραστηριότητες αυτού του είδους οι μαθητές θα συνδέσουν τα μαθηματικά με την τέχνη και την αισθητική και θα αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά είναι το μέσο για τη ανάπτυξη ενός πολιτισμού.

Λέξεις κλειδιά: λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας, πλακοστρώσεις

1. Εισαγωγή

Η λέξη tessellation προέρχεται από την λέξη tessellate που σύμφωνα με τον Steven Schwartzman's στο βιβλίο του The Words of Mathematics (The Mathematical Association of America) προέρχεται από την ελληνική λέξη tesseres. Τα πρώτα πλακίδια που χρησιμοποιούνταν για τις πλακοστρώσεις (κατασκευές μωσαϊκών) ήταν κατασκευασμένα από μικρά τετράγωνα ή κυβικά κομμάτια πέτρας. Δεδομένου ότι ένα μωσαϊκό καλύπτεται πλήρως από τέτοια κομμάτια η γεωμετρική σημασία της λέξης tessellation είναι «επικάλυψη του επιπέδου σε σχήματα με τέτοιο τρόπο ώστε να καλύπτουν το επίπεδο, χωρίς να αφήνουν κενά ή να επικαλύπτει το ένα σχήμα το άλλο». Μια παρόμοια ερμηνεία έχει και η λέξη tiles και το tiling (επίστρωση με tiles). Η επίστρωση με tiles χρησιμοποιεί και αυτή σχήματα, που μπορούν να επαναληφθούν στο επίπεδο χωρίς να αφήσουν κενά ή να επικαλύπτουν το ένα το άλλο. Μια ειδική περίπτωση επίστρωσης με tiles είναι τα rep-tiles (που σημαίνει replicating tiles δηλαδή αντιγράφοντας tiles).

Σύμφωνα με τον De Villiers (1993) οι κατασκευές πλακοστρώσεων είναι πολύ σημαντικές σε όλες τις βαθμίδες της Εκπαίδευσης γιατί :

- παρέχουν (/αποτελούν) ένα διαισθητικό (οπτικό) θεμέλιο για ένα μεγάλο εύρος γεωμετρικού περιεχομένου που αντιμετωπίζεται αργότερα τυπικά σε ένα λογικό-παραγωγικό πλαίσιο
- παρουσιάζει μεγάλη αισθητική έλξη λόγω των καλλιτεχνικών σχεδίων που μπορούν να δημιουργηθούν με αυτά
- περιλαμβάνει ένα ενδιαφέρον μαθηματικό θέμα που μπορεί να παρέχει μια άριστη ευκαιρία για εξερεύνηση και ανάλυση

Η τέχνη των πλακοστρώσεων έχει αναπτυχθεί από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα. Οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τα πρότυπα και στο χώρο και στο επίπεδο από την εποχή των Πυθαγορείων, οι οποίοι ανακάλυψαν ότι υπάρχουν πέντε κανονικά στερεά δηλαδή το τετράεδρο, ο κύβος, το οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο. Συνδεδεμένα με το όνομα του Πλάτωνα (427-348 π.Χ) είναι τα Πλατωνικά στερεά δηλαδή τα κυρτά στερεά, τα οποία χρησιμοποίησε προκειμένου να απεικονίσει τα τέσσερα βασικά στοιχεία του σύμπαντος: τη γη, τη φωτιά, το νερό και τον αέρα. «Τα πλατωνικά στερεά δεν είναι άλλα από τα κυρτά στερεά που οριοθετούνται από ίσα κανονικά επίπεδα πολύγωνα. Ίσα κανονικά επίπεδα πολύγωνα που μπορούν να σχηματίσουν κυρτά στερεά είναι μόνον τρία: το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο και το κανονικό πεντάγωνο. Τα δυνατά κυρτά στερεά που μπορούν να σχηματιστούν από αυτά είναι ακριβώς πέντε δηλαδή το κανονικό τετράεδρο, ο κύβος, το κανονικό οκτάεδρο, το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο»... «Έτσι η γη αποτελείται από στοιχειώδεις κύβους, το ύδωρ από στοιχειώδη κανονικά εικοσάεδρα, ο αήρ από στοιχειώδη κανονικά οκτάεδρα και το πυρ από στοιχειώδη κανονικά τετράεδρα» (Αναπολιτάνος, 1985). Ο Ευκλείδης (300 π.Χ) αναφέρει τους τύπους των κανονικών στερεών στο 13ο βιβλίο των Στοιχείων του.

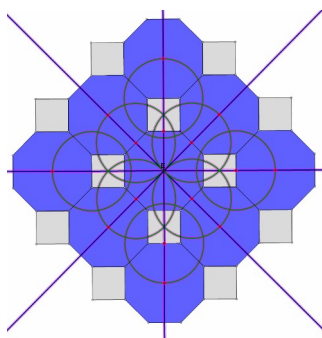
Τα μαθηματικά από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα παίζουν σημαντικό ρόλο στην τέχνη της πλακοστρώσης όπως και στις διάφορες μορφές τέχνης (Φίλη, 2000). Αν και τα μαθηματικά και η τέχνη είναι δυο διαφορετικά διακριτά πεδία πολλά θέματα των μαθηματικών έχουν χρησιμοποιηθεί από καλλιτέχνες κατά καιρούς. Η εργασία έχει στόχο να παρουσιάσει κατασκευές πλακοστρώσεων στο λογισμικό Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991) στις οποίες οι μαθητές δεν κερδίζουν μόνο ως προς τον χρόνο

κατασκευής τους αλλά και στην ανάπτυξη της αισθητικής και της φαντασίας υπερπηδώντας εμπόδια που παρουσιάζονται σε κατασκευές στο χαρτί, λόγω της άμεσης χρήσης των καταλλήλων εργαλείων του λογισμικού. Τέτοια εργαλεία είναι τα Προσαρμοσμένα εργαλεία (custom tools-scripts) του λογισμικού δηλαδή εργαλεία αρχείων εντολών που συνοδεύουν το λογισμικό ή που μπορεί να κατασκευάσει ο μαθητής όπως αυτά που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

2. Κατασκευή tessellation με χρήση Προσαρμοσμένων εργαλείων

Οι κατασκευές πλακοστρώσεων με χρήση κανονικών πολυγώνων απλουστεύονται στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991) λόγω των εργαλείων που διαθέτει, συμπεριλαμβανομένων των αρχείων εντολών κατασκευής κανονικών πολυγώνων. Μπορούμε να βρούμε τα αρχεία εντολών κανονικών πολυγώνων για την κατασκευή πλακοστρώσεων π.χ του οκταγώνου στον φάκελο Δείγματα > Προσαρμοσμένα εργαλεία > Πολύγωνα που συνοδεύει το λογισμικό. Στην εικόνα κάτω η κατασκευή γίνεται με την χρησιμοποίηση δυο Προσαρμοσμένων εργαλείων πολυγώνων, του (εγγεγραμμένου) οκταγώνου και του τετραγώνου. Στο σχήμα 1 έχουμε εμφανίσει όλες τις γραμμές σχεδίασης που απαιτηθήκαν για την κατασκευή του σχήματος.

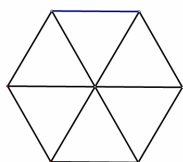
Παρά το γεγονός ότι έχουμε την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε δυο έτοιμα Προσαρμοσμένα εργαλεία, για την κατασκευή του οκταγώνου και του τετραγώνου, απαιτείται αρκετή μαθηματική σκέψη για την κατασκευή της πλακόστρωσης.



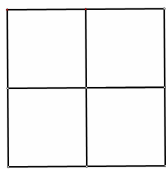
Σχήμα 1: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση οκταγώνου και τετραγώνου

2.1 Τα μαθηματικά 'πίσω' από τις κατασκευές Tessellations

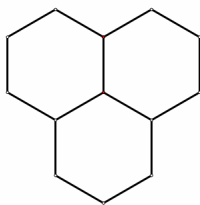
Για να βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να υπάρχουν για να επιστρώσουμε μια επιφάνεια με ίδια κανονικά πολύγωνα θα πρέπει να παρατηρήσουμε αρχικά ότι γύρω από ένα σημείο που είναι κορυφή κανονικού πολυγώνου, το οποίο χρησιμοποιούμε για την κάλυψη θα πρέπει να υπάρχουν το πολύ 6 και το λιγότερο 3 κανονικά πολύγωνα. Έξι πολύγωνα γιατί η μικρότερη γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 60° (ισόπλευρο). Τρία γιατί γύρω από την ίδια κορυφή θα υπάρχουν περισσότερα από δυο κανονικά πολύγωνα αφού κάθε γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι μικρότερη από 180° .



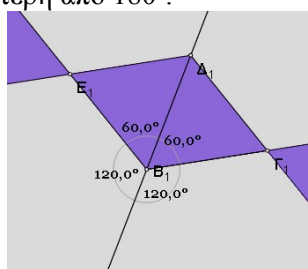
Σχήμα 2



Σχήμα 3



Σχήμα 4



Σχήμα 5

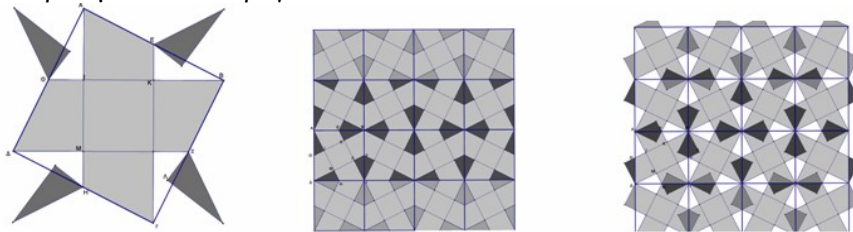
Σχήμα 2, 3, 4, 5: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση κανονικών πολυγώνων

Για να γενικεύσουμε τον συλλογισμό μας: γνωρίζουμε ότι αν είναι n το πλήθος των πλευρών του πολυγώνου τότε η κεντρική γωνία είναι ίση με $\omega = 360^\circ/n$ και η γωνία ϕ του πολυγώνου είναι ίση με $\phi = 180^\circ - \omega = 180^\circ - (360^\circ/n) = 180^\circ(n-2)/n$. Αν υποθέσουμε ότι ένα κανονικό πολύγωνα με γωνία ϕ καλύπτει το επίπεδο τότε πρέπει $k \cdot \phi = 360^\circ$, όπου k είναι ο αριθμός των πολυγώνων με κοινή κορυφή που απαιτούνται να καλύψουν το επίπεδο. Τότε όμως μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι $2 \cdot (k+n) = k \cdot n$, όπου n, k είναι φυσικοί αριθμοί και οι τιμές που μπορεί να πάρει το k είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 3 και μικρότερες ή ίσες του 6. Αν δώσουμε στο k τιμές και λάβουμε υπόψη τον τύπο επάνω, θα έχουμε την αντιστοιχία: όταν $n=3$ τότε $k=6$ δηλαδή απαιτούνται 6 ισόπλευρα τρίγωνα ($6 \times 60^\circ = 360^\circ$) (Σχήμα 2), όταν $n=4$ τότε $k=4$ δηλαδή απαιτούνται 4

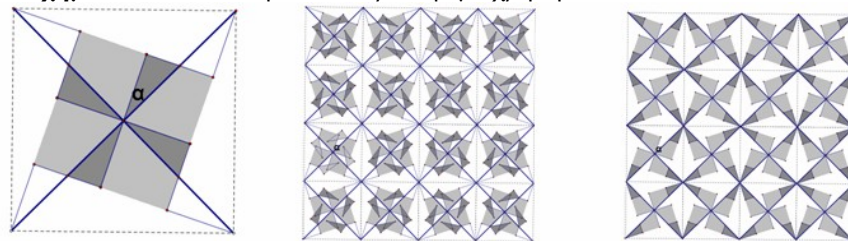
τετράγωνα ($4 \times 90^\circ = 360^\circ$) (Σχήμα 3) και όταν $n=6$ τότε $k=3$ δηλαδή απαιτούνται 3 εξάγωνα (Σχήμα 4), όπως φαίνεται στα σχήματα. Στο Σχήμα 5 έχουμε κάνουμε ζουμ στο σημείο επαφής των γωνιών των πολυγώνων. Οι μαθητές μπορούν να παρατηρήσουν ότι οι γωνίες των πολυγώνων σχηματίζουν άθροισμα ίσο με 360° . Δηλαδή να οδηγηθούν σε συμπεράσματα σχετικά με το είδος των διαφορετικών κανονικών πολυγώνων που μπορούν να σχηματίσουν μια πλακόστρωση.

3. Πλακόστρωση με animation και χρήση αρχείων εντολών

Η κατασκευή ενός προσαρμοσμένου εργαλείου και η χρήση μετασχηματισμών και άλλων αλληλεπιδραστικών τεχνικών του λογισμικού είναι ακόμα ένας τρόπος κατασκευής πλακοστρώσεων. Για παράδειγμα έχουμε κατασκευάσει το εργαλείο στο σχήμα αριστερά που μετασχηματίζει το αρχικό τετράγωνο σε ένα άθροισμα πέντε τετραγώνων.



Σχήμα 6: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση animation



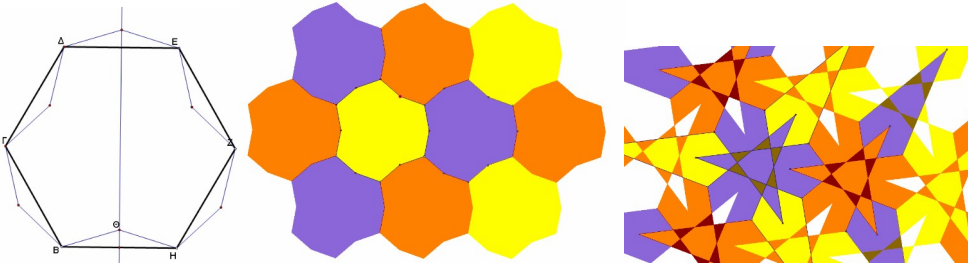
Σχήμα 7: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση animation

Το σχήμα στο κέντρο προέκυψε από την χρήση διαδοχικών ανακλάσεων στις πλευρές. Η χρήση των κουμπιών ενεργειών του σχήματος οδηγεί στο μετασχηματισμό της πλακόστρωσης όπως το σχήμα που είναι δεξιά (σχήμα 6).

Με παρόμοιο τρόπο η κατασκευή του αρχείου εντολών στο σχήμα 7 αριστερά παράγει την πλακόστρωση στο κέντρο αλλά και τον μετασχηματισμό της πλακόστρωσης με χρήση κουμπιών ενεργειών στο σχήμα δεξιά. Οι πλακοστρώσεις αυτές λόγω των μετασχηματισμών που υφίστανται, μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές στην κατανόηση της έννοιας της διατήρησης της επιφάνειας (Κορδάκη, 1999).

4. Πλακόστρωση μόνο με περιστροφές

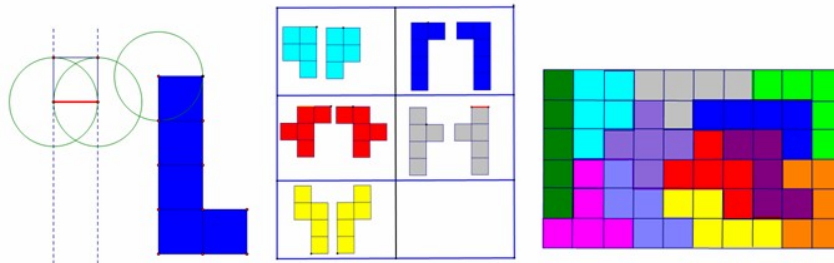
Η πλακόστρωση που θα κατασκευάσουμε στη συνέχεια, θυμίζει εφραπτόμενα «κυματιστά εξάγωνα». Κατασκευάζουμε ένα εξάγωνο. Επιλέγουμε το τμήμα ΒΗ και από το μενού Κατασκευή > Μέσου σημείου. Επιλέγουμε το ΒΗ και το μέσο σημείο και από το μενού Κατασκευή > Κάθετης ευθείας. Συνδέουμε με ευθύγραμμο τμήματα ένα σημείο Θ της ευθείας με τις κορυφές της βάσης Β, Η. Επιλέγουμε την ευθεία, και το μέσο και από το μενού Προβολή > Απόκρυψη αντικειμένων. Επιλέγουμε το Β και από το μενού Μετασχηματισμός > Επιλογή κέντρου. Επιλέγουμε την γραμμή ΒΘΗ και από το μενού Μετασχηματισμός > Περιστροφή κατά 120° . Συνεχίζουμε τις περιστροφές μέχρι να σχηματιστεί το 'κυματιστό' εξάγωνο. Επιλέγουμε τις κορυφές του πολυγώνου και από το μενού Κατασκευή > Εσωτερικού πολυγώνου. Σύρουμε την κορυφή Θ πάνω στην οθόνη και παρατηρούμε τις συμβαίνει στο σχήμα. Επιλέγουμε με διπλό κλικ τις κορυφές του εξαγώνου. Επιλέγουμε το πολύγωνο και από το μενού Περιστροφή του πολυγώνου κατά 120° . Συνεχίζουμε τις περιστροφές του πολυγώνου και θέτουμε με κουμπί Προσθήκης κίνησης, σε κίνηση το σημείο Θ. Τα σχήματα στο κέντρο και δεξιά κάτω, είναι κάποια από τα σχήματα που προκύπτουν από την μετακίνηση του σημείου Θ.



Σχήμα 8: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση περιστροφών

5. Τα πεντόμιнос

Τα πεντόμιнос είναι ένα σύνολο δώδεκα σχημάτων που έχουν δημιουργηθεί συνδυάζοντας 5 τετράγωνα ή κύβους, με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτευχθεί κάθε δυνατός συνδυασμός στην τοποθέτηση τους το ένα δίπλα στο άλλο. Ανήκουν στην κατηγορία των πολυόμιнос (polyomino), τα οποία οφείλουν το όνομα τους στον Solomon W. Golomb που τα ανακάλυψε το 1953. Αν παρατηρήσουμε τα πεντόμιнос θα προσέξουμε ότι τα σχήματα των πεντόμιнос τείνουν να μοιάζουν στα λατινικά γράμματα F, I, L, N, P, T, U, V, W, X, Y, Z. Μπορούμε να κατασκευάσουμε στο Sketchpad τα δικά μας πεντόμιнос με έναν απλό τρόπο. Παρατηρούμε ότι αποτελούνται όλα τα σχήματα πεντόμιнос από ίσα τετράγωνα. Όπως καταλαβαίνουμε για να έχουμε την δυνατότητα να συνδυάσουμε τα κομμάτια πεντόμιнос πρέπει οι πλευρές των τετραγώνων να είναι ίσες.

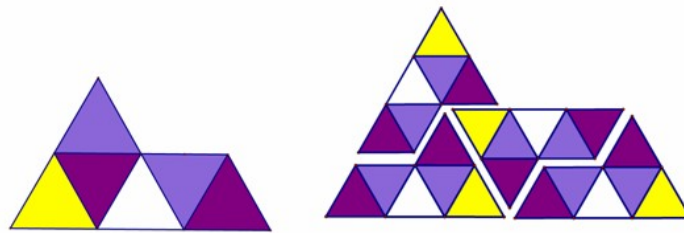


Σχήμα 9: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση πεντόμινο

Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα που θα αποτελέσει την πλευρά όλων των τετραγώνων μας. Κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο που να έχει πλευρά ίση με το ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα 'παραμετρικό' τετράγωνο. Αποθηκεύουμε το τετράγωνο στο χώρο των Προσαρμοσμένων εργαλείων σαν «ντόμινο». Με την βοήθεια του παραμετρικού τετραγώνου έχουμε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε όλα τα σχήματα πεντόμινο αλλά και να τα συνδυάσουμε κατάλληλα ώστε να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο σχήμα όπως το σχήμα δεξιά πάνω ή τετράγωνα κλπ. Η εφαρμογή των πεντόμινο είναι πολύ σημαντική για την ανάπτυξη οπτικοχωρικών ικανοτήτων στους μαθητές.

6. Τα Rep –tiles

Ο Golomb (1964) σύμφωνα με την ιστοσελίδα του NCTM που αναφέρεται στην βιβλιογραφία, προτείνει ένα διαφορετικό τύπο tiles τα οποία μπορούν να καλύψουν το επίπεδο, τα rep-tiles (replicating tiles). Ένα rep-tile είναι ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου τα αντίγραφα μπορούν να ταιριάξουν μαζί ώστε να σχηματίσουν ένα μεγαλύτερο όμοιο σχήμα. Δηλαδή μέσω των κατασκευών rep-tiles μπορούμε να εισάγουμε την έννοια της ομοιότητας (και σε πιο προχωρημένο επίπεδο της αυτοομοιότητας). Για να κατανοήσουμε τι ακριβώς είναι ένα rep-tile θα εξετάσουμε ένα παράδειγμα. Αν σχηματίσουμε με 4 τετράγωνα ένα σχήμα τότε είναι γνωστό ότι αυτά σχηματίζουν ένα μεγαλύτερο τετράγωνο. Το αρχικό τετράγωνο που χρησιμοποιήθηκε σαν κομμάτι puzzle για την κατασκευή του μεγαλύτερου τετραγώνου είναι ένα rep-tile. Όπως καταλαβαίνουμε αν πάρουμε πάλι 4 τετράγωνα ίσα με το μεγάλο τετράγωνο. Για να κατασκευάσουμε το rep-tile στο σχήμα 10, θα πρέπει να παρατηρήσουμε καθένα από τα σχήματα αυτά μεμονωμένα και να εξετάσουμε από τι σχήματα επιμέρους αποτελείται. Ακόμα να εξετάσουμε τον προσανατολισμό των σχημάτων στο επίπεδο και επομένως να κατασκευάσουμε το καθένα ξεχωριστά ή να κατασκευάσουμε ένα εργαλείο που θα επαναλαμβάνει την κατασκευή.

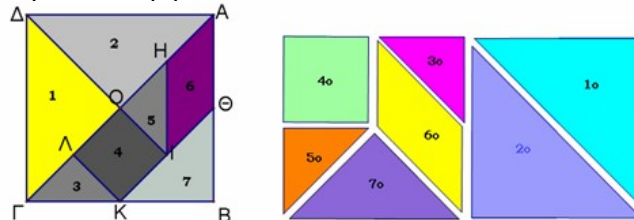


Σχήμα 10: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση rep-tiles

Η κατασκευή του σχήματος αριστερά είναι μια κατασκευή ενός κομματιού puzzle (rep-tile) (ή διαφορετικά δομικής μονάδας) για μια μεγαλύτερη κατασκευή με rep-tiles όπως το σχήμα δεξιά. Με τον πρωτότυπο τρόπο μπορούν οι μαθητές να πλακοστρώσουν το επίπεδο, αλλά και να κατασκευάσουν σχήματα που αποτελούν μια διαισθητική βάση για την κατανόηση της ομοιότητας, αλλά και της αυτοομοιότητας.

7. Το τανγκράμ (Tangram)

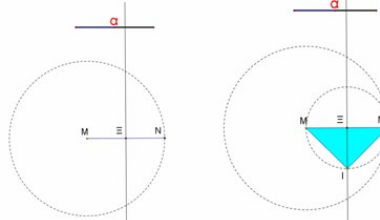
Το τανγκράμ (Tangram) είναι ένα κινέζικο παιχνίδι, ένας τύπος puzzle, που αποτελείται από επτά κομμάτια τα λεγόμενα τανς (tans) τα οποία όταν τοποθετηθούν κατάλληλα μπορούν να δημιουργήσουν συγκεκριμένα σχήματα. Ο στόχος είναι να σχηματίσεις το σχήμα με τα επτά κομμάτια, έτσι ώστε το σχήμα να περιέχει όλα τα κομμάτια και κανένα να μην καλύπτει το άλλο. Στη συνέχεια θα εξηγήσουμε πως μπορούμε να κατασκευάσουμε στο λογισμικό τα κομμάτια τανς. Η λέξη τανγκράμ είναι προφανώς κινεζικής προέλευσης και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1848 στον Δυτικό κόσμο, από τον Thomas Hill καθηγητή του Πανεπιστημίου του Harvard, μέσω του βιβλίου του Geometrical Puzzle for the Youth.



Σχήμα 11: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση tangram

7.1 Κατασκευές και υπολογισμοί των τανς

Κατασκευάζουμε αρχικά ένα τμήμα a που θα αποτελέσει την βάση κατασκευής όλων των κομματιών τανς. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε τα σχήματα που είναι αριθμημένα με το 1 και 2, τα οποία είναι δυο τρίγωνα ίσα με διαφορετικό χρώμα και προσανατολισμό. Αρχικά αναγνωρίζουμε τα σχήματα αυτά εξετάζοντας τις ιδιότητες τους. Είναι ίσα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα. Τοποθετούμε ένα σημείο M πάνω στην οθόνη. Επιλέγουμε το σημείο M και το τμήμα a και κατασκευάζουμε έναν κύκλο. Κατασκευάζουμε μια ακτίνα MN του κύκλου και το μέσο Ξ της ακτίνας. Επιλέγουμε το μέσο Ξ και την ακτίνα MN και κατασκευάζουμε την κάθετη ευθεία. Επιλέγουμε το μέσο Ξ της ακτίνας και το κέντρο M του κύκλου και κατασκευάζουμε έναν κύκλο. Συνδέουμε τα σημεία I , M και I , N με ευθύγραμμα τμήματα. Επιλέγουμε τις κορυφές του τριγώνου M , I , N και κατασκευάζουμε το εσωτερικό του τριγώνου. Κρύβουμε μέσω του μενού Προβολή τους κύκλους, την κάθετη ευθεία, το μέσο Ξ και κάνουμε κλικ με το ποντίκι πάνω σε κάθε γράμμα ώστε να το κρύψουμε. Δοκιμάζουμε το σχήμα που κάναμε.



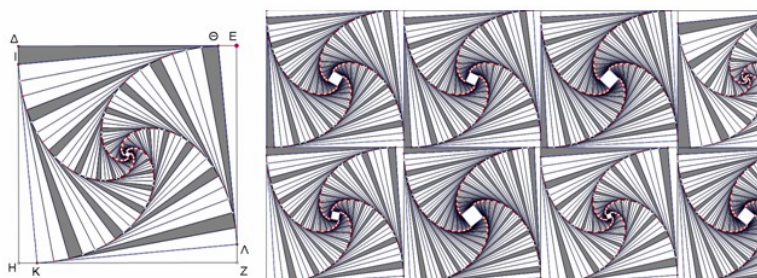
Σχήμα 12: Φάσεις κατασκευής τανς στο λογισμικό

Επιλέγουμε τώρα το τμήμα a και το σχήμα που κατασκευάσαμε και το αποθηκεύουμε ως νέο εργαλείο στην εργαλειοθήκη των Προσαρμοσμένων εργαλείων. Το ονομάζουμε '1' (ή όπως αλλιώς θέλουμε). Δοκιμάζουμε το εργαλείο. Εφαρμόζουμε το εργαλείο '1' στο ένα άκρο του a και στη συνέχεια στο δεύτερο άκρο του a . Θα εμφανιστεί απευθείας το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. Είναι σημαντικές οι ερωτήσεις που μπορούμε να απευθύνουμε στο σημείο αυτό προς τους μαθητές, όπως: Γιατί το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο και ισοσκελές; Μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη των πλευρών του σχήματος συναρτήσει του

α; Αν υποθέσουμε ότι το $a=1\text{cm}$ το μήκος της υποτεινουσας τότε θέτουμε x τα μήκη των καθέτων πλευρών και χρησιμοποιούμε το Πυθαγόρειο θεώρημα. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε και τα υπόλοιπα κομμάτια tans, αλλά και να υπολογίσουμε τις περιμέτρους ή τα εμβαδά τους.

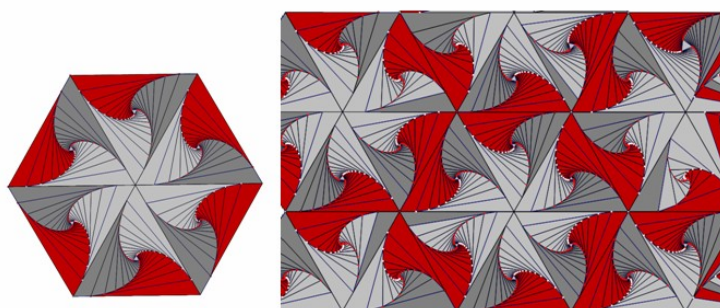
8. Κατασκευές σπειροειδών πλακοστρώσεων

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε σπείρες Baravelle που έχουμε την δυνατότητα να θέσουμε σε κίνηση. Για την κατασκευή της σπείρας Baravelle στο σχήμα 13, κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο ΔΕΖΗ. Επιλέγουμε το Εργαλείο του σημείου και τοποθετούμε ένα σημείο σε αυθαίρετη θέση πάνω στην πλευρά ΑΒ. Ονομάζουμε το σημείο Θ. Επιλέγουμε το Δ, το Θ και από το μενού Κατασκευή > Τμήματος. Επιλέγουμε το τμήμα ΔΘ και την κορυφή Η και κατασκευάζουμε κύκλο από το μενού Κατασκευή > Κύκλου από κέντρο + ακτίνα.



Σχήμα 13: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση σπείρας με animation

Ενώνουμε με ευθύγραμμα τμήματα τις κορυφές του τετράπλευρου που κατασκευάσαμε. Ένα ερώτημα που μπορούμε να θέσουμε στο σημείο αυτό στους μαθητές είναι η εξής: Τι τετράπλευρο είναι το ΘΛΚΙ;



Σχήμα 14: Κατασκευή πλακόστρωσης με χρήση animation

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σπειροειδές ισόπλευρο τρίγωνο με animation, στην συνέχεια ένα εξάγωνο και να επεκτείνουμε την διαδικασία με την κατασκευή της εντυπωσιακής πλακόστρωσης δεξιά, που η κίνηση στο εσωτερικό της δίνει φαντασμαγορικά σχέδια. Οι μαθητές μέσω της τεχνολογίας και των μαθηματικών παράγουν σχήματα με ανεπτυγμένη αισθητική, παράγουν τέχνη. Τα γεωμετρικά αντικείμενα που παρουσιάστηκαν στις κατασκευές δεν έχουν μόνο ανεπτυγμένη αισθητική αλλά είναι και φορείς μαθηματικών ιδιοτήτων που μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αντιληφθούν διαισθητικά και να κατανοήσουν έννοιες όπως η ακολουθία, η γεωμετρική πρόοδος και το όριο.

9. Συζήτηση

Σύμφωνα με τους Τουμάση και Αρβανίτη (2000) «Ένας από τους ευρύτερους στόχους της διδασκαλίας της γεωμετρίας στη Β/θμια εκπαίδευση είναι να προσφέρει μια ευκαιρία στους μαθητές να βιώσουν τη δημιουργική αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης». Οι ιδέες που παρουσιάστηκαν για την δημιουργία πλακοστρώσεων με χρήση του μενού Κατασκευή και Μετασχηματισμός ή και με χρήση των αυξημένων ιδιοτήτων των Προσαρμοσμένων εργαλείων του Geometer's Sketchpad, μπορούν να αξιοποιηθούν για να κατασκευάσουν οι μαθητές δημιουργικές εργασίες στα πλαίσια του μαθήματος της γεωμετρίας στο Γυμνάσιο ή στο Λύκειο. Το σημαντικό είναι ότι με τις δραστηριότητες αυτού του είδους θα επιτύχουμε ένα διπλό στόχο: α) οι μαθητές να κάνουν τέχνη μέσα από την γεωμετρία, να συνδέσουν δηλαδή τα μαθηματικά με τον πραγματικό, εξωμαθηματικό κόσμο και να αντιληφθούν ότι τα μαθηματικά είναι το

μέσο για τη ανάπτυξη ενός πολιτισμού β) να αποκτήσουν ένα ισχυρό διαισθητικό θεμέλιο για την ανάπτυξη των λογικών συνδέσεων μεταξύ των κατασκευών στο λογισμικό και των μαθηματικών εννοιών.

Βιβλιογραφία

De Villiers, M.D. (1993). Transformations: A golden thread in school mathematics. Spectrum, 31(4), Oct, 11-18

Jackiw, N. (1991) Geometer's Sketchpad [Computer Software] Berkeley CA Key Curriculum Press

Αναπολιτάνος, Δ. (1985). *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*, Γ' έκδοση, εκδόσεις Νεφέλη:Αθήνα

Κορδάκη, Μ. (1999). Οι έννοιες της διατήρησης και της μέτρησης της επιφάνειας μέσα από το σχεδιασμό την υλοποίηση και την αξιολόγηση εκπαιδευτικού λογισμικού. Διδακτορική διατριβή, Πάτρα, Μάιος, 1999

Τουμάσης, Μπ.& Αρβανίτης, Τ. (2000). Μαθηματικά και Τέχνη: Διακοσμητικά σχήματα με χρήση γεωμετρικού λογισμικού, *Πρακτικά του 17ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Ε.Μ.Ε.

Φίλη Χ.: Γεωμετρία και Τέχνη(2000): Δυο παράλληλες αναζητήσεις. *Πρακτικά του 17ου Πανελληνίου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, Ε.Μ.Ε.

<http://illuminations.nctm.org>