Γνωστικές αλληλεπιδράσεις στις κατασκευές μέσω του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας geometer's sketchpad

Σ.Πατσιομίτου
Εκπ/κός Δ/θμιας Εκπ/σης, Med Διδακτικής και Μεθοδολογίας Μαθηματικών ΕΚΠΑ,
Υπ. Διδάκτωρ Παν. Ιωαννίνων
spatsiomitou@sch.gr

Περίληψη

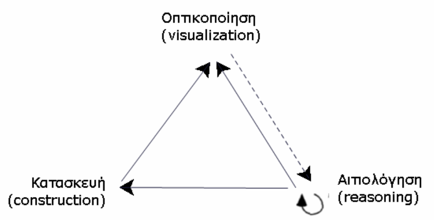
Η δυσκολία που παρουσιάζεται στη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας οφείλεται στην αυστηρή λογική, ιεραρχία και τον παραγωγικό συλλογισμό που απαιτείται στην δομή ανάπτυξης του περιεχομένου. Στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad οι κατασκευές μπορούν να βοηθήσουν τον μαθητή να συνδέσει λογικά τις ενέργειες του με την μαθηματική έννοια, δηλαδή να σκεφτεί με βάση τη λογική για τα αντικείμενα που πρέπει να επιλέξει στο λογισμικό, έτσι ώστε να μην αποτελέσουν ένα ακόμα γνωστικό εμπόδιο για την εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών.
Λέξεις κλειδιά: *λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας , σχήμα , σχέδιο*

1.Εισαγωγή

Τα γεωμετρικά σχήματα που κατασκευάζουμε σε οποιοδήποτε μέσο, είναι προϊόντα των νοητικών εικόνων, που υπάγονται σε νοητικούς μετασχηματισμούς, χρησιμεύοντας ως μέσα για να μεταφέρουν τις έννοιες που αποδίδονται σε αυτά από το άτομο (Peirce, 1906). Η κατασκευή του γεωμετρικού σχήματος από την πλευρά του μαθητή, είναι μια διαδικασία αποτύπωσης στο χαρτί που μπορεί να προέρχεται είτε επειδή θέλει να μετατρέψει τις πληροφορίες του προβλήματος σε κατασκευή ή γιατί σκέφτεται κάτι και το απεικονίζει όπως το σκέφτεται ή ακόμα το αντιγράφει από ένα βιβλίο γεωμετρίας. Δηλαδή πρόκειται για μια μετατροπή πληροφοριών λεκτικών ή νοητικών ή ακόμα και οπτικών. Σε οποιαδήποτε από τις παραπάνω διαδικασίες παίζει σημαντικό ρόλο ο τρόπος επεξεργασίας των πληροφοριών και ο τρόπος μετασχηματισμού των πληροφοριών αυτών ώστε να προκύψει το γεωμετρικό σχήμα. Για παράδειγμα έστω ότι ο μαθητής αντιγράφει το σχήμα ενός βιβλίου. Παρατηρούμε το σχήμα που κατασκεύασε αφού ολοκληρώσει την κατασκευή του. Εξετάζουμε αν οι γραμμές που έχει σχεδιάσει είναι κατασκευασμένες με τον ίδιο τρόπο που είναι κατασκευασμένες στο βιβλίο. Όσο πιο πολύ ταυτίζονται οι δυο εικόνες, τόσο περισσότερο έχει λάβει υπόψη του, τους κανόνες που είναι αναγκαίοι για να έχει η κατασκευή του κάποιο γεωμετρικό νόημα και τόσο περισσότερο έχει χρησιμοποιήσει τις γεωμετρικές του γνώσεις δηλαδή γνώση των ορισμών και θεωρημάτων προκειμένου να το κατασκευάσει. Αυτό σημαίνει ότι η προσοχή του προκειμένου να κάνει την κατασκευή, έχει στραφεί σε κάποια στοιχεία και ιδιότητες του σχήματος. Στη περίπτωση που οι εικόνες μοιάζουν αλλά δεν ταυτίζονται, έχει απλώς αντιληφθεί συνολικά το σχήμα και μετέφερε τις πληροφορίες που πήρε από την εικόνα του βιβλίου, χωρίς να λάβει υπόψη τους κανόνες. Που διαφέρει η πρώτη περίπτωση από την δεύτερη; Στην πρώτη περίπτωση έχει τον έλεγχο της κατασκευής του, έχει ακολουθήσει συνειδητά βήματα, έχει εστιάσει την προσοχή του σε συγκεκριμένα στοιχεία του σχήματος. Στην δεύτερη περίπτωση δεν έχει κάνει συνειδητά βήματα και δεν έχει διαχωρίσει εκείνα τα στοιχεία του σχήματος που είναι αναγκαία για την ορθότητα της κατασκευής. Έτσι, στην πρώτη περίπτωση έχει κάνει ένα *γεωμετρικό σχήμα*, ενώ στην δεύτερη περίπτωση ένα *γεωμετρικό σχέδιο*. Στην πρώτη περίπτωση το σχήμα του είναι το αιτούμενο, ενώ στην δεύτερη περίπτωση μοιάζει με αυτό. Στην πρώτη περίπτωση --δηλαδή του γεωμετρικού σχήματος-- δεν αποδίδει απλώς την γενική μορφή του σχήματος αλλά διατηρεί πιστά τις σχέσεις ανάμεσα στα στοιχεία που αναπαριστάνει, δηλαδή για παράδειγμα βλέπει που οι γραμμές είναι παράλληλες που είναι κάθετες, αν ακόμα κάποια στοιχεία όπως πλευρές ή γωνίες της κατασκευής μας είναι ίσες. Στόχος της εργασίας είναι να παρουσιάσει πως οι κατασκευές στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991) μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να συνδέσουν λογικά τις ενέργειες τους με την επιλογή των καταλλήλων εντολών του λογισμικού, παράγοντας κατ' αυτό τον τρόπο ένα σχήμα. Στην επόμενη παράγραφο θα εξετάσουμε τις έννοιες του σχήματος και του σχεδίου όπως αναφέρονται στη διεθνή βιβλιογραφία και στη συνέχεια πως οι μαθητές που εμπλέκονται στην κατασκευή ενός σχήματος στο λογισμικό αποκτούν την ικανότητα να κάνουν μια λογική σύνδεση μεταξύ της ενέργειας στο λογισμικό και της γεωμετρίας θεωρίας που περιλαμβάνει αυτή η κατασκευή.

2. Τι είναι γεωμετρικό σχήμα και τι γεωμετρικό σχέδιο ;

Η διαφορά μεταξύ του σχήματος-σχεδίου διατυπώθηκε από τον Parzysz (1988). Για τον Parzysz, ένα σχέδιο είναι η αναπαράσταση ενός γεωμετρικού αντικειμένου ενώ το σχήμα είναι η έννοια που καθορίζει αυτό το θεωρητικό αντικείμενο. Με το υλικό αντικείμενο «σχέδιο» και το θεωρητικό αντικείμενο «σχήμα», η γεωμετρία μας παρέχει δύο συμπληρωματικές έννοιες, τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Για παράδειγμα, η αιτιολόγηση ότι δυο τρίγωνα είναι ίσα, αφ' ενός αναφέρεται στα αφηρημένα νοητικά αντικείμενα όπως είναι οι έννοιες της γωνίας, πλευράς, τρίγωνου, αλλά και στις σχηματικές πληροφορίες ή τις σχηματικά αντιπροσωπευόμενες διαδικασίες, που προέρχονται από τις οπτικές εικόνες που μπορεί να προέλθουν από την τοποθέτηση /επίθεση των δύο γωνιών και των πλευρών που οριοθετούν τη γωνία. Επομένως αφού ενδιαφερόμαστε για την ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού--αιτιολόγησης θα πρέπει να ασχοληθούμε με την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο πτυχών – των σχηματικών και εννοιολογικών (Mariotti, 1992, 1996). Η Mariotti ισχυρίζεται ότι «Ένα γεωμετρικό σχήμα --όπως χρησιμοποιείται στο γεωμετρικό συλλογισμό-- δεν είναι ούτε καθαρή εικόνα, ούτε καθαρή έννοια. Σε γενικές γραμμές, τα γεωμετρικά αντικείμενα - και αυτό ισχύει όσον αφορά τα μαθηματικά γενικά - μπορούν να θεωρηθούν ως νοητικές οντότητες και μπορούν να αντιμετωπιστούν σε καθαρά νοητικό επίπεδο. Μέσα σε ένα σύστημα αυτού του τύπου, το θεώρημα επικυρώνει την ακρίβεια της κατασκευής: η σχέση μεταξύ των στοιχείων του σχεδίου που παράγονται από την κατασκευή στηρίζονται θεωρητικά σχετικά με το γεωμετρικό σχήμα (figure) που αντιπροσωπεύεται από το σχέδιο (drawing). Η Laborde (1993) καθιστά σαφή τη διάκριση μεταξύ σχεδίου-σχήματος δηλώνοντας ότι: «το σχέδιο αναφέρεται στην υλική οντότητα ενώ το σχήμα αναφέρεται στο θεωρητικό αντικείμενο». Αυτός ο προσδιορισμός είναι κοντά στην σχηματική έννοια (figural concept) όπως διατυπώνεται από τον Fishbein (1993) σύμφωνα με τον οποίο «Μια γεωμετρική έννοια περιλαμβάνει δύο πραγματικά συνδεδεμένες συνιστώσες ως δύο πλευρές ενός νομίσματος, την σχηματική (figural) και την εννοιολογική (conceptual)». Ο Fischbein αναφέρει ότι «το γεωμετρικό σχήμα είναι η ιδέα που αντιστοιχεί στο σχέδιο, η αφηρημένη, ιδεατή οντότητα που καθορίζεται επακριβώς από τον ορισμό». Είναι προφανές ότι αυτό που μας ενδιαφέρει και σίγουρα επιδιώκουμε είναι οι μαθητές μας να κατασκευάζουν ένα γεωμετρικό σχήμα και όχι ένα γεωμετρικό σχέδιο. Και ακόμα περισσότερο να έχουν την δυνατότητα να αιτιολογήσουν την κατασκευή μας με λεκτικές διατυπώσεις που συνδέουν τις πληροφορίες μεταξύ τους, με καταλλήλους ορισμούς ή θεωρήματα. Για παράδειγμα αν θέλουν να κατασκευάσουν ένα παραλληλόγραμμο τότε θα πρέπει να λάβουν υπόψη τον ορισμό του παραλληλογράμμου και να σχεδιάσουν τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, αλλά και να έχουν την δυνατότητα να εξηγήσουν γιατί στο σχήμα έχουν κάνει τις απέναντι πλευρές παράλληλες. Να συνδέσουν δηλαδή με τον τρόπο αυτό σημαντικές γνωστικές διαδικασίες με στόχο οι ενέργειες τους στα μαθηματικά αντικείμενα που αναπαριστάνουν -- ευθείες, κύκλους, τρίγωνα κ.ο.κ--, να σχετίζονται με την απόδοση της νοητικής εικόνας που έχουν σχηματίσει για τα γεωμετρικά αντικείμενα που βλέπουν και την επεξήγηση τους. Να συνδέσουν δηλαδή λειτουργίες οπτικοποίησης (Visualization), κατασκευής (Construction) και αιτιολόγησης (Reasoning) (Duval, 1998; Κολέζα, 2000) λειτουργίες που παρά το γεγονός ότι είναι ανεξάρτητες, συνδέονται στενά μεταξύ τους με αποτέλεσμα να έχουμε ή όχι επαρκείς γνώσεις στη Γεωμετρία.



Σχήμα 1: *Γνωστικές αλληλεπιδράσεις που εμπλέκονται σε μια γεωμετρική δραστηριότητα (Duval, 1998, p.38; Κολέζα, 2000, σ.258)*

Τα προβλήματα κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων, αποτελούν τον πυρήνα των δραστηριοτήτων που προτείνονται στους μαθητές. Παρά τον προφανή πρακτικό στόχο, δηλ. το σχήμα που πρέπει να πραγματοποιηθεί σε ένα στατικό μέσο χαρτί ή πίνακα, οι γεωμετρικές κατασκευές έχουν έναν θεωρητικό στόχο. Ο κύριος στόχος είναι η ανάπτυξη της έννοιας «της κατασκευής» ως θεωρητικής διαδικασίας που μπορεί να επικυρωθεί από θεωρήματα. Ο στόχος των κατασκευαστικών διαδικασιών διαρθρώνεται δηλαδή ως εξής: α) να παρέχουν οι μαθητές την περιγραφή της διαδικασίας που χρησιμοποιείται για να λάβουν το ζητούμενο σχήμα β) να παρέχουν μια αιτιολόγηση της ορθότητας αυτής της διαδικασίας.

3. Κατασκευαστικές οδηγίες και γεωμετρικές κατασκευές

Στα σχολικά εγχειρίδια αναφέρονται οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα γεωμετρικό σχήμα, δηλαδή οι κατασκευαστικές οδηγίες. Οι κατασκευαστικές οδηγίες είναι ένα σύνολο πληροφοριών που περιέχουν τις ιδιότητες του σχήματος ταυτόχρονα με την κατασκευή του σχήματος. Ένα σύνολο οδηγιών θεωρείται πλήρες όταν συνδέει λεκτική περιγραφή με εικονική περιγραφή. Για παράδειγμα η κατασκευή της διαμέσου ή της καθέτου ευθείας από σημείο ή και σε σημείο ευθείας στο σχολικό εγχειρίδιο, είναι μια περιγραφική μέθοδος που συνοδεύεται από εικόνες προκειμένου να επιτευχθεί η διαδικασία από τον μαθητή. Στην περίπτωση του σχολικού εγχειριδίου ή των στατικών μέσων γενικότερα, επεξηγείται με ποιον τρόπο πρέπει να χρησιμοποιηθούν ο διαβήτης ή ο γνώμονας προκειμένου να υπάρχει ένα παράδειγμα το οποίο έχουμε την δυνατότητα να ακολουθήσουμε και να κατασκευάσουμε με επιτυχία το σχήμα. Οι κατασκευές που προτείνονται στα εγχειρίδια έχουν θεωρητική βάση δηλαδή κάθε βήμα συνδέεται με κάποιον ορισμό ή θεώρημα. Η κατασκευή της διαμέσου για παράδειγμα στηρίζεται στον ορισμό, η κατασκευή του ισοπλεύρου τριγώνου στηρίζεται στην 1η Πρόταση των Στοιχείων του Ευκλείδη. Συνήθως υπάρχουν περισσότεροι του ενός τρόποι να κατασκευάσουμε ένα γεωμετρικό σχήμα. Σκεφτείτε για παράδειγμα πως μπορούμε να κατασκευάσουμε την διχοτόμο μιας γωνίας. Υπάρχουν δυο τρόποι τουλάχιστον: α) με ένα μοιρογνωμόνιο, που στηρίζεται στην γνώση του ορισμού, καθότι πρέπει να μετρήσουμε την γωνία και στην συνέχεια να κατασκευάσουμε την διχοτόμο με το μοιρογνωμόνιο, β) να χρησιμοποιήσουμε μόνο χάρακα και διαβήτη χωρίς να μετρήσουμε την γωνία, που στηρίζεται στη γνώση του ορισμού και σχετικού θεωρήματος. Οι μέθοδοι αυτοί απαιτούν μια εκμάθηση της «συνταγής» (ή του συνόλου οδηγιών διαφορετικά), δηλαδή της κατασκευαστικής διαδικασίας, προκειμένου να κατασκευάζουμε μια διχοτόμο με σωστό τρόπο. Η εκμάθηση της χρήσης των εργαλείων επομένως είναι αναγκαία, αλλά εξίσου αναγκαίο είναι να γνωρίζουμε και κάποιες κατασκευαστικές διαδικασίες που πρέπει να ακολουθούνται. Και βέβαια αυτό δεν έχει σχέση με έναν αλγόριθμο που μαθαίνουμε προκειμένου να κάνουμε κάποιες πράξεις στην άλγεβρα π.χ πως εφαρμόζουμε την ταυτότητα $(α+β)^2$ σε μια σύνθετη αλγεβρική παράσταση, δεν παύει όμως να είναι μια συμπεριφοριστική διαδικασία. Και στη γεωμετρία οι κατασκευές κάθε άλλο παρά «συνταγές» ή «σύνολο οδηγιών» είναι, αφού για να αποκτήσει νόημα η διαδικασία είναι αναγκαίο ο μαθητής να συνδέει κάθε κατασκευαστικό βήμα με κάποιον ορισμό ή με σχετικό θεώρημα, κάθε βήμα δηλαδή να έχει θεωρητική επεξήγηση.

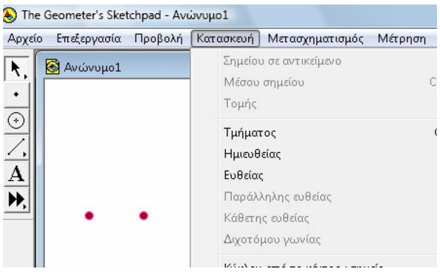
Είναι φυσικό να αναρωτηθούμε πόσο πιο δύσκολη μπορεί αυτή η διαδικασία να γίνει με το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991), αφού πρέπει να μάθουμε και την χρήση των εργαλείων του λογισμικού. Παρά το γεγονός ότι είναι αναγκαία η εκμάθηση του εργαλείου, τα πράγματα αντί να δυσκολέψουν, γίνονται απλούστερα, αφού οι αφηρημένες έννοιες γίνονται όλο και περισσότερο συγκεκριμένες. Το λογισμικό διαθέτει κάποια εργαλεία τα οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ακόμα και αν δεν είμαστε έμπειροι χρήστες. Για να κάνουμε τις κατασκευές στο λογισμικό είναι αναγκαίο επομένως να γνωρίζουμε πως λειτουργούν τα εργαλεία της εργαλειοθήκης και τι δυνατότητες έχει κάθε εντολή. Οι γνώσεις μας στην γεωμετρία θα μας βοηθήσουν να κάνουμε τις κατασκευές με διαφορετικούς τρόπους, δηλαδή πως θα ενεργήσουμε προκειμένου να κάνουμε ένα γεωμετρικό σχήμα, που πληροί κάποιες ιδιότητες, αλλά και η θεωρητική επεξήγηση ταυτόχρονα με την κατασκευαστική διαδικασία. Το αιτούμενο επομένως είναι να μην επαναλαμβάνονται μηχανικά οι κινήσεις, αλλά να συνδέεται η διαδικασία με την θεωρητική δομή του συνόλου των σχέσεων που συνοδεύουν την κατασκευαστική διαδικασία. Δηλαδή όταν κάνουμε μια κατασκευή να φέρουμε κατά νου την μαθηματική έννοια έτσι ώστε να κάνουμε μια λογική σύνδεση μεταξύ της ενέργειας στο λογισμικό και της θεωρίας που περιλαμβάνει αυτή η κατασκευή. Έτσι θα σκεφτούμε με βάση τη λογική για τα αντικείμενα που πρέπει να επιλέξουμε στο λογισμικό.

4. Λογικό μαθηματικές συνδέσεις και λειτουργία του λογισμικού

Όπως αναφέραμε κάθε μας ενέργεια στο λογισμικό είναι αναγκαίο να συνοδεύεται από λογική αν δεν θέλουμε να παράγουμε απλώς όμορφα καλοσχεδιασμένα σχέδια, δηλαδή με άλλα λόγια να οδηγούμαστε σε εξήγηση των ενεργειών μας. Το λογισμικό μπορεί να μας βοηθήσει να κάνουμε αυτές τις συνδέσεις. Θα προσπαθήσουμε να επεξηγήσουμε τι εννοούμε με αυτό στην συνέχεια δίνοντας κάποια παραδείγματα.

Επιλεγουμε ένα σημείο που κατασκευάσαμε (αυτό σημαίνει ότι κάνουμε ένα αριστερό κλικ με το ποντίκι πάνω στο σημείο) και το μενού Κατασκευή. Πόσες εντολές είναι φωτισμένες στο μενού Κατασκευή; Καμιά. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε με ένα σημείο μόνο κάποια κατασκευή. Σύμφωνα με τα Στοιχεία του Ευκλείδη «Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν» δηλαδή σημείο είναι κάθε τι που δεν έχει μέρος δηλαδή διάσταση. (α΄[1]. Βιβλίον Ι, Στοιχεία Ευκλείδη).

Το λογισμικό Geometer's Sketchpad έλαβε υπόψη του τόσο στον ορισμό του σημείου όσο και στους ορισμούς των άλλων γεωμετρικών αντικειμένων (π.χ κύκλος) που περιέχονται στα Στοιχεία του Ευκλείδη αλλά και τους Όρους, τα Αιτήματα και τις Προτάσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Αυτό θα το διαπιστώνουμε όλο και περισσότερο όσο προχωρούμε στις κατασκευές. Κατασκευάζουμε ακόμα ένα σημείο και επιλέγουμε και τα δυο σημεία.

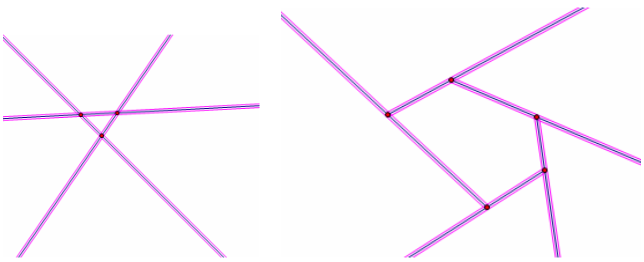


Σχήμα 2: *Κατασκευή δυο σημείων στην οθόνη και εμφάνιση του Μενού Κατασκευή*

Όπως παρατηρούμε είναι οι εντολές Τμήματος, Ημιευθείας, Ευθείας και Κύκλου από το κέντρο + σημείο. Δηλαδή με τα δυο σημεία μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ευθεία, μια ημιευθεία, ένα ευθύγραμμο τμήμα και έναν κύκλο που θα έχει το πρώτο σημείο ως κέντρο και το δεύτερο σημείο ως πέρας της ακτίνας. Πράγματι όπως γνωρίζουμε από την Ευκλείδεια γεωμετρία δυο σημεία ορίζουν μια ευθεία, δυο σημεία ορίζουν και μια ημιευθεία κ.ο.κ Μπορούμε να επιλέξουμε μια-μια τις εντολές και να δούμε πως λειτουργούν. Κατασκευάζουμε και ένα τρίτο σημείο και επιλέγουμε και τα τρία σημεία. Πόσες εντολές είναι τώρα φωτισμένες στο μενού Κατασκευή; Όπως παρατηρούμε είναι οι εντολές τμημάτων, ημιευθειών, ευθειών, διχοτόμου γωνίας, κ.ο.κ. Δοκιμάζουμε για παράδειγμα με επιλεγμένα τα σημεία να επιλέξουμε και την εντολή τμημάτων. Τι παρατηρούμε; Κατασκευάζονται τρεις ευθείες που διέρχονται από τα σημεία που έχουμε κατασκευάσει στη οθόνη(σχήμα 3, αριστερά). Οδηγούμαστε στη σκέψη ότι το λογισμικό πιθανότατα ανά δυο σημεία να ορίζει μια ευθεία.

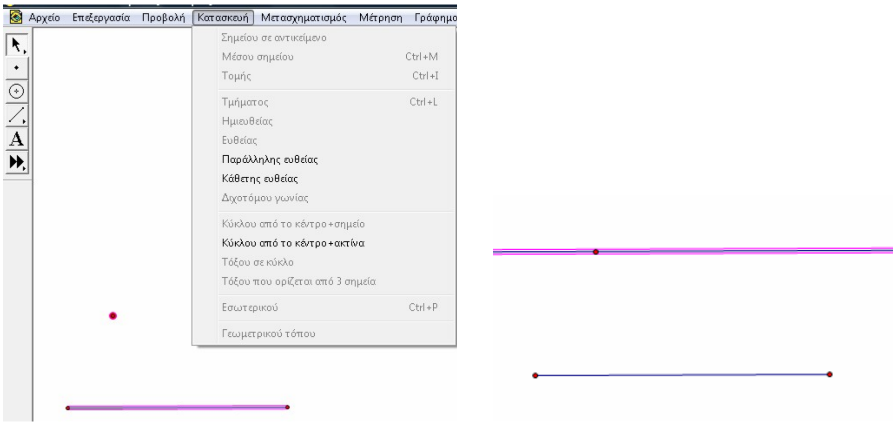
Αυτή είναι μια εικασία που μπορεί να επιβεβαιωθεί με κάποιες δοκιμές ακόμα ή να απορριφθεί. Αν κατασκευάσουμε 4 σημεία πόσες ευθείες ορίζονται; Παρατηρούμε ότι ορίζονται 4 ευθείες, συνδέοντας ανά δυο τα σημεία με την σειρά κατασκευής τους. Το ίδιο συμβαίνει και όταν έχουμε 5 σημεία ή 10 σημεία στην οθόνη. Επομένως οδηγούμαστε να διατυπώσουμε ένα συμπέρασμα που προέρχεται από δοκιμές, διερεύνηση και επαγωγική σκέψη: το λογισμικό δεν ορίζει το πλήθος των ευθειών που μπορούν να σχηματιστούν μεταξύ των σημείων, αλλά κατασκευάζει τις ευθείες συνδέοντας ανά δυο τα σημεία με την σειρά κατασκευής τους.

Αυτές οι πρώτες ενέργειες μας στο λογισμικό και οι αρχικές σκέψεις, μας οδηγούν σε άλλες: Είναι οι ενέργειες με χρήση άλλης εντολής με παρόμοια λογική; Για παράδειγμα η εντολή της ημιευθείας χρησιμοποιεί άλλη λογική; Δοκιμάζουμε να κατασκευάσουμε 5 σημεία και επιλέγουμε από το μενού Κατασκευή >> Ημιευθειών (σχήμα 3, δεξιά). Τι παρατηρούμε; Το λογισμικό χρησιμοποιεί την ίδια λογική και για την κατασκευή των ημιευθείων. Κάθε ημιευθεία έχει αρχή ένα σημείο κατασκευής και εκτείνεται προς το μέρος που είναι το επόμενο σημείο κατασκευής. Κατασκευάζουμε τώρα ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα σημείο πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα. Επιλέγουμε το τμήμα και το σημείο (ώστε να είναι και τα δυο φωτισμένα με ένα ροζ χρώμα) και επιλέγουμε το μενού Κατασκευή. Ποιες εντολές είναι τώρα φωτισμένες;



Σχήμα 3: *Κατασκευή των ευθειών ή ημιευθειών που συνδέουν σημεία στην οθόνη*

Όπως παρατηρούμε η εντολή "κατασκευής παράλληλης ευθείας", "κάθετης ευθείας" και "κύκλου από κέντρο + ακτίνα". Δοκιμάζουμε μια –μια τις εντολές και παρατηρούμε πως λειτουργούν. Αρχίζουμε με την εντολή Παράλληλης ευθείας. Τι παρατηρούμε; Το λογισμικό κατασκευάζει μια ευθεία παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο (σχήμα 4). Στο σημείο αυτό μπορούμε να ρωτήσουμε στους μαθητές: Μπορούμε να κατασκευάσουμε και μια δεύτερη παράλληλη από το σημείο αυτό προς την ευθεία; Τέμνονται οι παράλληλες ευθείες μεταξύ τους;



Σχήμα 4. *Κατασκευή παράλληλης ευθείας προς ευθεία από σημείο εκτός αυτής*

Που στηρίζεται η κατασκευή των παραλλήλων ευθειών στο λογισμικό; Στον όρο 23 του Βιβλίου Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη και το περίφημο 5ο Αίτημα, γνωστό με την διατύπωση «Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται προς αυτή μόνο μια παράλληλη». Επιλέγουμε στην συνέχεια το μενού Επεξεργασία και την εντολή Αναίρεση κατασκευής παράλληλης ευθείας. Θα δούμε ότι επανέρχεται στο σχήμα στην αρχική του μορφή, δηλαδή είναι μόνο επιλεγμένα το σημείο και το ευθύγραμμο τμήμα. Δοκιμάζουμε τώρα (με επιλεγμένα το σημείο και το ευθύγραμμο τμήμα) την εντολή “κύκλου από κέντρο + ακτίνα”. Τι παρατηρούμε; Το λογισμικό κατασκευάζει ένα κύκλο με κέντρο το σημείο και ακτίνα της οποίας το μήκος είναι άγνωστο. Επομένως τι σχέση έχει η λειτουργία της εντολής αυτής με το επιλεγμένο ευθύγραμμο τμήμα στην οθόνη; Επιλέγουμε το Εργαλείο σχεδίασης ευθυγράμμων αντικειμένων και κατασκευάζουμε μια ακτίνα του κύκλου. Δηλαδή, επιλέγουμε το κέντρο του κύκλου και σχηματίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρο το κέντρο του κύκλου και δεύτερο άκρο αυθαίρετο σημείο πάνω στον κύκλο.
Οι μετρήσεις των τμημάτων μπορούν να οδηγήσουν τον μαθητή να παρατηρήσει, να εικάσει και στη συνέχεια να συμπεράνει ότι το λογισμικό για να κατασκευάσει τον κύκλο χρησιμοποίησε ως κέντρο το σημείο Α και ως ακτίνα το επιλεγμένο ευθύγραμμο τμήμα. Μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε έναν κύκλο χρησιμοποιώντας ένα οποιοδήποτε σημείο πάνω στην οθόνη και για κάθε ευθύγραμμο τμήμα; Η λειτουργία του συρσίματος (dragging) μας οδηγεί να συμπεράνουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που θα χρησιμοποιήσουμε μπορεί να είναι ένα τμήμα οποιοδήποτε, ακόμα και η πλευρά ενός τριγώνου για παράδειγμα. Μας οδηγεί δηλαδή να γενικεύσουμε και να συνδέσουμε την κατασκευή του κύκλου με τον ορισμό του κύκλου αλλά και να επεκτείνουμε τον τρόπο κατασκευής κύκλων σε σχέση με τα στατικά μέσα.

5. Συζήτηση

Η δυσκολία που παρουσιάζεται στη διδασκαλία και μάθηση της γεωμετρίας οφείλεται στην αυστηρή λογική, ιεραρχία και τον παραγωγικό συλλογισμό που απαιτείται στην δομή ανάπτυξης του περιεχομένου, στην έννοια της απόδειξης που συνδέεται με την λογική εφαρμογή όλων των αυστηρά θεμελιωμένων αξιωμάτων, θεωρημάτων, πορισμάτων και προτάσεων. Ακόμα ότι μέσω των γεωμετρικών εννοιών μπορούμε να αναπαραστήσουμε φυσικά αντικείμενα αντιπροσωπεύοντας έτσι όλη την κλάση των αντικειμένων ή με τεχνητούς τρόπους (για παράδειγμα σχέδιο) ιδεατά αντικείμενα. Όταν κατασκευάζουν οι μαθητές ένα σχήμα στο τετράδιο τους δεν αναφέρονται σε κάτι αφηρημένο αλλά σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο των αισθήσεων τους. Αντιμετωπίζουν έτσι μια τεράστια δυσκολία να διεισδύσουν σε έννοιες που σχετίζονται με μια άπειρη κλάση ιδεατών αντικειμένων, αφού αναφερόμενοι σε ένα γεωμετρικό σχήμα στην ουσία αναφερόμαστε στην άπειρη κλάση και όχι στο συγκεκριμένο αντικείμενο. Επομένως τα διαγράμματα της στατικής γεωμετρίας δημιουργούν πρόβλημα διότι και φυσική υπόσταση έχουν και συγκεκριμένα είναι. Αυτό έχει σαν άμεση συνέπεια τη δυσκολία σύνδεσης του γεωμετρικού προβλήματος με το κατάλληλο γεωμετρικό σχήμα που είναι βασικό στοιχείο της επίλυσης ενός γεωμετρικού προβλήματος. Άλλες δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά την κατασκευή του ίδιου του σχήματος οφείλονται στη μη κατανόηση του σωστού τρόπου χρήσης των εργαλείων (αναφερόμενοι στην Ευκλείδεια στατική γεωμετρία τότε τα βασικά εργαλεία κατασκευής είναι ο κανόνας και ο διαβήτης) ή άλλων γνωστικών εμποδίων που προκύπτουν κατά την διάρκεια της διδασκαλίας.
Η δυσκολία αυτή ξεπερνιέται σε ένα λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας όπου ο μαθητής με το σύρσιμο του αντικειμένου από τις κορυφές, με τη χρήση της animation εντολής και των υπολοίπων αλληλεπιδραστικών

τεχνικών αντιλαμβάνεται ότι το αντικείμενο που κατασκεύασε στην οθόνη αντιπροσωπεύει μια άπειρη κλάση.

Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα είναι η έλλειψη συγχρονισμού της διδασκαλίας με την νοητική ανάπτυξη του μαθητή. Τα γεωμετρικά αντικείμενα, η αιτιολόγηση και η χρησιμοποιούμενη γλώσσα είναι διαφορετικά τόσο ανάμεσα στον μαθητή και τον δάσκαλο όσο και ανάμεσα στους μαθητές της ίδιας τάξης. Υπάρχει μια απόκλιση επομένως μεταξύ των αναμενόμενων αποδόσεων στη γεωμετρία και του επιπέδου της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών.

Οι αναφερόμενες δυσκολίες και η παρουσίαση της λειτουργίας των εργαλείων του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας μας οδηγούν να αναρωτηθούμε σχετικά: Ποια γεωμετρικά εργαλεία επομένως μπορούν να οδηγήσουν τον μαθητή να λάβει υπόψη του τις θεωρητικές παραμέτρους της κατασκευής, προκειμένου το σχήμα του να μην ικανοποιεί μόνο τους οπτικούς περιορισμούς αλλά να είναι και συνεπές με τις ιδιότητες που το καθορίζουν και ταυτόχρονα να είναι συνεπές με το συνολικό γεωμετρικό πλαίσιο;

Η απάντηση είναι: λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας. Μέσω του λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας έχουμε την δυνατότητα να μοντελοποιήσουμε προβλήματα και να συνδέσουμε προβλήματα του πραγματικού κόσμου με τα μαθηματικά. Έτσι μας δίνεται η δυνατότητα να συνδέσουμε την άτυπη με την τυπική γνώση, να κατανοήσουμε και να μεταδώσουμε αυτή την γνώση και κατανόηση. Συγκεκριμένα, αν οι μαθητές πρέπει να μάθουν πώς οι άνθρωποι ανακαλύπτουν γεγονότα και μεθόδους, πρέπει να θεωρήσουν τα μαθηματικά ως ένα ζωντανό αντικείμενο, και όχι ως οριστικοποιημένο και αμετάβλητο προϊόν. Τα συστήματα δυναμικής γεωμετρίας αν και δεν είναι «γλωσσικά», βοηθούν την κατασκευή, το παιχνίδι, τη δόμηση συλλογισμών και την περιγραφή μαθηματικών αντικειμένων που προκύπτουν μέσα από μία ακολουθία βημάτων. Ακόμα μειώνουν αισθητά την προσπάθεια που χρειάζεται η εκμάθηση μια δεξιότητας και δεν αποτελούν δικαιολογία για περικοπή της ύλης. Είναι όμως αναγκαία η εξοικείωση με τα εργαλεία αυτά ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές να σχηματίσουν μαθηματικές ιδέες και να μην αποτελέσουν ένα επιπλέον γνωστικό εμπόδιο ή όπως αναφέρει ο Goldenberg (1999) «ακόμα κι αν η τεχνολογία είναι προσεκτικά επιλεγμένη ώστε να υποστηρίξει τους στόχους μιας σειράς μαθημάτων, δεν μπορεί έτσι απλά να «προσγειωθεί» σε μία δομή που έχει σχεδιαστεί χωρίς πρόβλεψη για τη χρήση της. Η διδακτική, η ύλη και η τεχνολογία πρέπει να έχουν νόημα μαζί, ως σύνθεση».

Βιβλιογραφία

Duval, R. (1998) Geometry from a Cognitive Point of View, In C. Mammana & V. Villani(eds*), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study*, Dordrecht: Kluwer.

Fischbein E. (1993), The theory of figural concepts, in *Ed. Stud. in Math.* Vol. 24, n. 2, pp.139-62.

Goldenberg, P. (1999), Principles, Art, and Craft in Curriculum Design: The Case of Connected Geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* **4**: Kluwer

Jackiw, N. (1991). *The Geometer's Sketchpad* [Computer program]. Berkeley, CA: Key Curriculum Press

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: the case of geometry,Keithel, C. & Ruthven, K., *Learning from computers: mathematics education and technology*, NATO ASI Series, Springer Verlag, 48-67.

Mariotti M.A. (1992), Geometrical reasoning as a dialectic between the figural and the conceptual aspect, in *Topologie structurale / Structural topology* , n. 18.

Mariotti M.A. (1996) *Interaction between images and concepts in geometrical reasoning,* Doctoral thesis, Università di Tel Aviv, Pre-Print Dipartimento di Matematica di PIsa, n. 5.21.939.

Parzysz, B. (1988). Knowing versus seeing: problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studiesin Mathematics*, *19*(1), 79–92.

Peirce, C. S. (1906). Prolegomena to an apology of pragmaticism. In J.Hoopes (Ed.), *Peirce on signs: Writings on semiotics by Charles Sanders Peirce* (pp. 249-252). Chapel Hill: The University of North Carolina Press

Κολέζα, Ε.(2000): Γνωσιολογική και Διδακτική Προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών. Leader books