

Όταν τα Γράμματα Χορεύουν: Ενσώματος Συμμεταβολικός Συντονισμός Μέσω Τεχνολογίας Αναγνώρισης Κίνησης Χεριών

Μυρτώ Καραβάκου, Μαρία-Στέλλα Νικολάου

karavak@eds.uoa.gr, msnikolaou@eds.uoa.gr

Παιδαγωγικό Τμήμα Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Περίληψη

Στην εργασία παρουσιάζεται μέρος έρευνας σχεδιασμού που μελετάει υλικά θεμελιωμένη ενσώματη μορφή έκφρασης γραμμικής συνάρτησης - διπλάσιας αναλογίας από μαθητές Ε' Δημοτικού, καθώς χρησιμοποιούν τεχνολογία αναγνώρισης κίνησης χεριών, το "MaLT2Dance", στο πλαίσιο δραστηριοτήτων καλλιτεχνικής δημιουργίας "χορευτικών γραμμάτων". Οκτώ μαθητές συμμετείχαν σε σχεδιασμό και εκτέλεση χορογραφίας, συντονίζοντας ανά δύο τις κινήσεις των χεριών τους που ήταν συνδεδεμένες δυναμικά με γεωμετρικούς μετασχηματισμούς σχημάτων (γραμμάτων) με ενσωματωμένες αναλογικές σχέσεις πλευρών, με σκοπό το γράμμα να κινείται στον ρυθμό μουσικών τραγουδιών. Μέσα από θεματική ανάλυση δεδομένων από βίντεο καταγραφής οθόνης, βιντεοσκοπήηση και μαγνητοφώνηση των παιδιών, και σημειώσεων, αναδεικνύεται η σταδιακή μετάβαση από ασυντόνιστες κινήσεις σε πιο ακριβή και στοχευμένο συντονισμό. Στη συζήτηση δίνεται βάση στον ρόλο της τεχνολογίας και της καλλιτεχνικής αισθητικής στην ανάπτυξη και εξέλιξη ενσώματου μαθηματικού-συμμεταβολικού συλλογισμού από μαθητές, με στόχο τη συμβολή στην γενικότερη ερευνητική συζήτηση γύρω από την θεώρηση και τον ρόλο των τεχνολογιών στην ενσώματη μάθηση μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά: ενσώματη μάθηση, νεο-υλισμός, συμμεταβολικός συλλογισμός, τεχνολογία αναγνώρισης κίνησης, χορός

Εισαγωγή

Ο συμμεταβολικός συλλογισμός αποτελεί βασική συνιστώσα της συναρτησιακής σκέψης (Thompson & Carlson, 2017), όμως συχνά διδάσκεται μέσω στατικών αναπαραστάσεων, αποκομμένων από τη σωματική και αισθητηριακή εμπειρία. Η χρήση ψηφιακών τεχνολογιών επέτρεψε την αλληλεπίδραση με δυναμικές αναπαραστάσεις, ενισχύοντας τη συμμετοχή μαθητών/τριών στη μοντελοποίηση της συμμεταβολής (Basu & Panorkou, 2019· Ferretti et al., 2024· Pitalis et al., 2024). Ωστόσο, μεγάλο μέρος της έρευνας παραμένει προσανατολισμένο σε λεκτικές/συμβολικές εκφράσεις της συμμεταβολής, με το σώμα να λαμβάνει κυρίως εργαλειακό ρόλο. Παράλληλα, οι περισσότερες μελέτες εστιάζουν σε κλειστές εργασίες με προσομοιώσεις φυσικών φαινομένων, αφήνοντας λιγότερο χώρο για ανοιχτές ή αισθητικά καθοδηγούμενες εμπειρίες.

Η παρούσα εργασία έχει ως σκοπό να διερευνήσει εναλλακτικούς τρόπους έκφρασης του συμμεταβολικού συλλογισμού μέσω χορογραφικής εμπλοκής μαθητών/τριών Ε' Δημοτικού με το ψηφιακό περιβάλλον MaLT2Dance, μια τεχνολογία που επιτρέπει τον έλεγχο παραμέτρων γεωμετρικών μετασχηματισμών με την κίνηση των χεριών μπροστά από την κάμερα. Η μελέτη στηρίζεται θεωρητικά σε ενσώματες (Abrahamson et al., 2020) και νεο-υλιστικές προσεγγίσεις (de Freitas & Sinclair, 2013) και στην αισθητικά καθοδηγούμενη μάθηση μέσω καλλιτεχνικής δημιουργίας (Karavakou et al., 2023· Karavakou & Kynigos, 2025), τοποθετώντας τη σωματική δράση και την αισθητική κρίση στο κέντρο της μαθηματικής δραστηριότητας. Θεμελιώνεται σε προηγούμενες έρευνες με μεγαλύτερους μαθητές (Karavakou & Kynigos, 2025), που εξερεύνησαν τη δημιουργία χορογραφημένων

γεωμετρικών σχημάτων μέσω του MaLT2 χωρίς αισθητήρες κίνησης. Η εισαγωγή της τεχνολογίας καταγραφής χειρών επιχειρεί να ενισχύσει την ενσώματη μαθηματική έκφραση και να διερευνηθεί σε μικρότερες ηλικίες. Η εργασία επικεντρώνεται στα ερευνητικά ερωτήματα: "Τι μορφές ενσώματου συμμεταβολικού συλλογισμού αναπτύσσουν οι μαθητές Ε' Δημοτικού σε αισθητικά καθοδηγούμενο πλαίσιο ταιριάσματος δυναμικού σχήματος με τη μουσική;", και "Πώς αυτές διαφοροποιούνται ανάλογα με τον τρόπο διάδρασης των παιδιών με το ψηφιακό εργαλείο;".

Συμμεταβολικός συλλογισμός ως υλικά θεμελιωμένα ενσώματη αισθητική εμπειρία: κριτική θεώρηση και επαναπροσδιορισμός

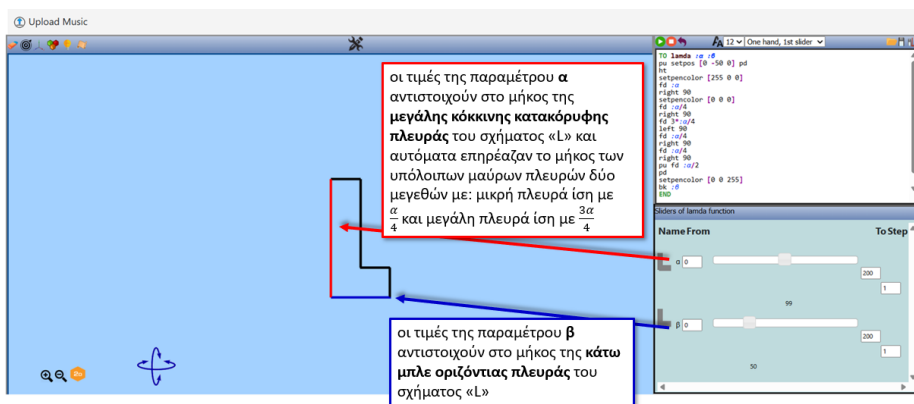
Ο συμμεταβολικός συλλογισμός (covariational reasoning) έχει μελετηθεί εκτενώς ως νοητική ικανότητα συντονισμού της ταυτόχρονης μεταβολής δύο ποσοτήτων, συχνά στο πλαίσιο ερμηνείας και εξήγησης γραφικών παραστάσεων (Basu & Panorkou, 2019· Carlson et al., 2002· Thompson & Carlson, 2017). Οι Thompson και Carlson (2017) έχουν ορίσει έξι επίπεδα (E) ανάπτυξης του: (E0) *απουσία συντονισμού*: όπου οι μαθητές/τριες δεν αντιλαμβάνονται τη σύνδεση των μεταβαλλόμενων ποσοτήτων· (E1) *προ-συντονισμός*: όπου εντοπίζεται μια σταδιακή μεταβολή χωρίς σαφή αντιστοίχιση· (E2) *αδρός συντονισμός*: με αντίληψη της ταυτόχρονης μεταβολής, αλλά χωρίς ακριβή έλεγχο· (E3) *συντονισμός τιμών*: με ενεργό δημιουργία και παρακολούθηση αντιστοιχιών μεταξύ τιμών· (E4) *αποσπασματικά συνεχής συντονισμός*: όπου η μεταβολή γίνεται αντιληπτή ως δυναμική αλλά κατά τμήματα· και (E5) *ομαλά συνεχής συντονισμός*, όπου ερμηνεία της ταυτόχρονης μεταβολής των δύο ποσοτήτων. Βασίζόμενες σε αυτό το πλαίσιο, πολλές προσεγγίσεις εστιάζουν κυρίως στην προφορική ή γραπτή - λεκτική ή συμβολική/αλγεβρική - έκφραση της συμμεταβολής από τα παιδιά (Basu & Panorkou, 2019· Pitalis et al., 2024). Η ενσώματη εμπλοκή συχνά παραμελείται ή αντιμετωπίζεται εργαλειακά, ως μέσο για την επίτευξη γνωστικών στόχων. Έτσι, ο συμμεταβολικός συλλογισμός παραμένει σε μεγάλο βαθμό θεμελιωμένος σε γνωστικο-κεντρικό υπόβαθρο, όπου δίνεται έμφαση σε εσωτερικές, αναπαραστατικές διεργασίες. Πρόσφατες απόπειρες ενσωμάτωσης της ενσώματης διάστασης εισήγαγαν την έννοια του "ενσώματου εργαλειοποιημένου συμμεταβολικού συλλογισμού (embodied instrumented covariation)" (Bagossi, 2024· Ferretti et al., 2024). Η ενσώματη δράση και η χρήση ψηφιακών εργαλείων αναδεικνύονται εργαλειακά ως μέσα για την ανάπτυξη κατανόησης των συναρτησιακών σχέσεων.

Στην παρούσα εργασία, ο συμμεταβολικός συλλογισμός προσεγγίζεται υπό νεο-υλιστική σκοπία (Barad, 2003· de Freitas & Sinclair, 2013): ως ενσώματη, αισθητικά καθοδηγούμενη διάδραση, όπου η μάθηση αναδύεται από την αλληλεμπλοκή (intra-action) σωμάτων, εργαλείων και εννοιών χωρίς προϋπάρχοντα γνωστικά "τέλη". Στο πλαίσιο αυτό, δημιουργική δράση ορίζεται η ανάδυση μαθηματικού νοήματος μέσα από αλληλεπιδράσεις κινήσεων, αισθήσεων και υλικών (Latsi & Kynigos, 2022· Sinclair και συν., 2013). Έτσι, η δημιουργική δράση εκφράζεται ως αισθητική κρίση των μαθητών απέναντι στο υπό κατασκευή δυναμικό σχήμα, καθοδηγούμενη από το πόσο "ωραίο" ή "ταιριαστό" κρίνεται (αισθητικά) σε σχέση με τον ρυθμό, τη μελωδία και την ένταση της μουσικής. Η διαδικασία αυτή ενσωματώνει αισθήσεις, συναισθήματα και ενσώματο συντονισμό και συνιστά αισθητικά καθοδηγούμενο συμμεταβολικό συλλογισμό (ΑΚΣΣ) (Karavakou & Kynigos, 2025), στον οποίο η μαθηματική σχέση βιώνεται ως αισθητηριακά αρμονική (ή όχι), παρά ως "αλγεβρικά ορθή". Στόχος της παρούσας εργασίας, λοιπόν, είναι να συσχετίσει τις αναδύόμενες μορφές υλικής-ενσώματης και αισθητικά καθοδηγούμενης έκφρασης της

συμμεταβολής με τα έξι θεωρητικά επίπεδα ανάπτυξης (Ε0-Ε5), σε μία πρώτη προσπάθεια θεωρητικοποίησης μέσω σύνδεσης και επέκτασης της σχετικής βιβλιογραφίας.

Μέθοδος

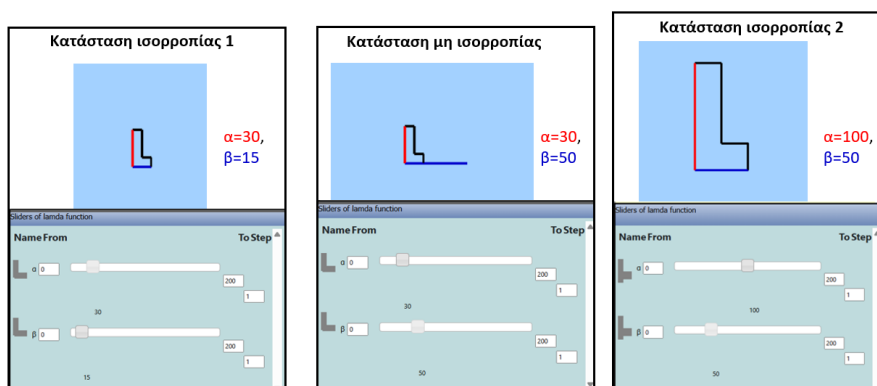
Η παρούσα μελέτη ακολούθησε μέθοδο έρευνας σχεδιασμού (design-based research), με στόχο την εξερεύνηση της εμφάνισης μορφών ΑΚΚΣ σε δραστηριότητες χορογραφίας ψηφιακών δυναμικών σχημάτων με τεχνολογία αναγνώρισης κίνησης χεριών και σύνδεσης με δυναμικούς γεωμετρικούς μετασχηματισμούς στην οθόνη. Η έρευνα υλοποιήθηκε σε μορφή παρέμβασης σε σχολικό πλαίσιο. Στην παρέμβαση συμμετείχαν οκτώ μαθητές/τριες Ε΄ Δημοτικού (10-11 ετών), εκ των οποίων τέσσερα ήταν κορίτσια. Η παρέμβαση διήρκεσε έξι διδακτικές ώρες (ολόκληρη σχολική μέρα) και υλοποιήθηκε εντός του σχολικού ωρολογίου προγράμματος, σε συνεργασία με τον υπεύθυνο δάσκαλο της τάξης. Οι μαθητές/τριες εργάζονταν σε ζεύγη με έναν υπολογιστή και ένα ζευγάρι ακουστικά ανά ομάδα. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν στο ψηφιακό περιβάλλον MaLT2Dance (<https://extendt2.com/widgets/malt2dance/>), επέκταση του MaLT2 με ενσωματωμένη τεχνολογία ανίχνευσης κίνησης χεριών συνδεδεμένη με την κίνηση ολισθητών παραμέτρων. Έτσι, μέσω του MaLT2Dance, οι μαθητές/τριες μπορούσαν να ελέγχουν τιμές παραμέτρων μέσω της κίνησης των χεριών τους μπροστά από την κάμερα του υπολογιστή. Στις σχεδιασμένες δραστηριότητες, κάθε ομάδα μαθητών/τριών ενθαρρυνόταν να συγχρονίσει τις κινήσεις του, ελέγχοντας τις τιμές δύο παραμέτρων (α και β) ώστε να διαμορφώσουν και να διατηρήσουν γεωμετρικά γράμματα (όπως το "L" του Σχήματος 1) σε καταστάσεις "ισορροπίας" ή "μη ισορροπίας", καθώς αυτά "χορεύουν" πάνω στον ρυθμό μουσικής.



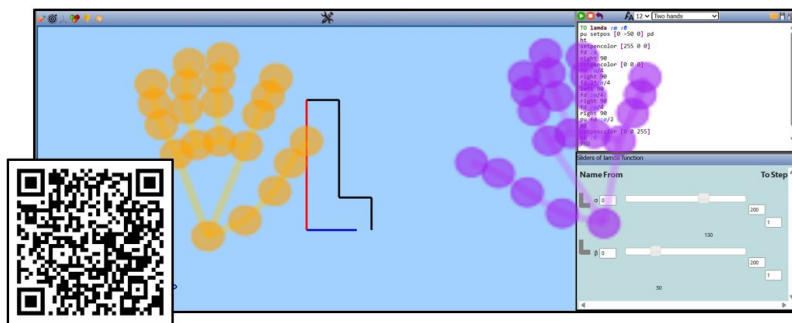
Σχήμα 1. Η δυναμική γεωμετρική αναπαράσταση του γράμματος "L" στο περιβάλλον MaLT2Dance για την 1^η φάση δραστηριότητας

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται και συζητιούνται τα αποτελέσματα του πρώτου μέρους δραστηριοτήτων, διάρκειας δύο διδακτικών ωρών, όπου το "χορευτικό γράμμα L" κατασκευαζόταν από τις τιμές των παραμέτρων α και β με την εξής σχέση ισορροπίας: "το α να είναι διπλάσιο του β " (Σχήματα 1, 2). Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, οι ομάδες ενθαρρύνονταν να "κάνουν το γράμμα L να χορεύει" ώστε να ταιριάζει σε επιλεγμένα τραγούδια που έπαιζαν στο παρασκήνιο, κουνώντας τα χέρια με τους εξής τρεις τρόπους (ο κάθε τρόπος αντιστοιχεί σε μία φάση δραστηριοτήτων): (1) αρχικά το ένα παιδί της ομάδας

κουνούσε με το ένα χέρι την μπάρα της μεταβλητής α , και το δεύτερο την μπάρα της μεταβλητής β με το ποντίκι, ενώ μετά άλλαζαν ρόλους (πρώτο μέρος του βίντεο του Σχήματος 3 - σύστημα ποντίκι-χέρι)· (2) στη συνέχεια, αντιστρόφως, το ένα παιδί της ομάδας κουνούσε με το ένα χέρι την μπάρα της μεταβλητής β , και το δεύτερο την μπάρα της μεταβλητής α με το ποντίκι, ενώ μετά άλλαζαν ρόλους (δεύτερο μέρος του βίντεο του Σχήματος 3)· (3) τέλος, το ένα παιδί της ομάδας κουνούσε με το ένα χέρι την μπάρα της μεταβλητής α , και το δεύτερο παιδί κουνούσε επίσης με το ένα χέρι την μπάρα της μεταβλητής β (τρίτο μέρος του βίντεο του Σχήματος 3 - σύστημα χέρι-χέρι). Για τις πρώτες δύο φάσεις, τα παιδιά ενθαρρύνονταν να ξεκινήσουν τα χορευτικά μέσω της χορογραφικής ακολουθίας "χαλάσματος" και "φτιαξίματος" της ισορροπίας στον ρυθμό του τραγουδιού, ενώ στην τρίτη φάση ήταν ελεύθερα να χορογραφήσουν όπως θέλαν εκείνα τον τρόπο κίνησης του σχήματος.



Σχήμα 2. Παραδειγματα-στιγμιότυπα διατήρησης και μη διατήρησης ισορροπίας του σχήματος του γράμματος "L" κατά την 1^η φάση δραστηριοτήτων



Σχήμα 3. Οι τρεις διαφορετικοί τρόποι κίνησης των μπαρών των ολισθητών με την κίνηση των χεριών (προβολή βίντεο πατώντας στο [link](#) ή σαρώνοντας το QR code).

Τα δεδομένα συλλέχθηκαν με ποικίλα μέσα, που περιλάμβαναν βιντεοσκόπηση όλων των ομάδων με κινητές κάμερες ανά διαστήματα, καταγραφή οθόνων υπολογιστών (μαζί με ήχο εισόδου-εξόδου), καταγραφή ήχου με μαγνητόφωνα σε κάθε ομάδα, συλλογή συμπληρωμένων φύλλων εργασίας με σημειώσεις και σχόλια μαθητών/τριών, ημιδομημένες συνεντεύξεις με μαθητές/τριες, εστιάζοντας σε στιγμές που βίωσαν ως "ωραίες, αρμονικές,

ικανοποιητικές ή υπερδεμένες", και ερευνητικό ημερολόγιο με περιγραφές, παρατηρήσεις και ερμηνευτικά σχόλια από τις τέσσερις παρευρισκόμενες ερευνήτριες.

Ακολούθησε θεματική ανάλυση δεδομένων με μεθοδολογικό συνδυασμό ανάλυσης βίντεο, κωδικοποίησης λόγου και κινήσεων, ανάλυσης φύλλων εργασίας, μέσω τριγωνποίησης πηγών. Τα δεδομένα αναλύθηκαν σε συσχετισμό, ώστε να αναδειχθούν επαναλαμβανόμενα μοτίβα αισθητικά καθοδηγούμενου ενσώματου συμμεταβολικού συλλογισμού. Εντοπίστηκαν κρίσιμα συμβάντα τέτοιων μοτίβων και εξετάστηκαν ως περιπτώσεις ενσώματου ΑΚΣΣ που προσέγγιζαν κάποια από τα στάδια E0-E5 των Thompson και Carlson (2017), χωρίς να υπάρχει πλήρης αντιστοιχία. Στην επόμενη ενότητα παρουσιάζονται σύντομα δύο κρίσιμα συμβάντα από την πρώτη φάση και τρία από τη δεύτερη.

Αποτελέσματα

Σύστημα χέρι-ποντίκι: "Χάλασμα-φτιάξιμο, χάλασμα-φτιάξιμο..."

Στην αρχή της φάσης (πριν την ενεργοποίηση της κάμερας ανίχνευσης κίνησης χεριών), όπου τα παιδιά μπορούσαν να χειρίζονται τους ολισθητές των παραμέτρων μόνο με το ποντίκι, η μία παρευρισκόμενη ερευνήτρια έθεσε το ερώτημα: "Μήπως παρατηρείτε κάποια σχέση μεταξύ του α και του β όταν το σχήμα L είναι κλειστό;" (εννοώντας σε κατάσταση ισορροπίας). Η (προφορική) απάντηση όλων των ομάδων ήταν ότι "το α είναι το διπλάσιο του β" (O1, O2, O4) ή ότι "το β είναι το μισό του α" (O3). Παρόλο που αυτή η σχέση είχε λεκτικοποιηθεί από νωρίς, ο συντονισμός των κινήσεων χεριού-ποντικιού από τα μέλη κάθε ομάδας με την εισαγωγή χειρισμού του πρώτου ολισθητή της παραμέτρου α με το χέρι (1^η φάση) παρέμεινε *ασυντόνιστη* (E0 του μοντέλου των Thompson και Carlson (2017)). Αφού τα μέλη κάθε ομάδας συμφώνησαν ποιο θα χρησιμοποιεί το χέρι και ποιο το ποντίκι για το πρώτο μέρος δραστηριότητας, το ένα μέλος που κουνούσε το χέρι ξεκινούσε "χαλώντας" το κλειστό σχήμα μέσω αλλαγών στην τιμή του α, ενώ το άλλο με το ποντίκι - χειριζόμενο τις τιμές της παραμέτρου β - προσπαθούσε να "το φτιάξει". Τρεις από τις τέσσερις ομάδες ξεκίνησαν τις κινήσεις τους (χεριού-ποντικιού) με αντίθετες κατευθύνσεις, στο πλαίσιο τακτικής δοκιμής-και-σφάλματος, όπου η ανατροφοδότηση από το δυναμικό σχήμα (κατά πόσο ή με ποιον τρόπο προσεγγίζει τη θέση ισορροπίας) ήταν καθοριστική για να την αλλάξουν στη συνέχεια.

Για παράδειγμα, για το πρώτο τραγούδι (Σχήμα 4) ο ένας μαθητής (M1) της O1 ξεκίνησε σύροντας την μπάρα της παραμέτρου α προς τα αριστερά μέχρι την τιμή $\alpha=26$ και ο δεύτερος (M2) έσυρε αρχικά την τιμή της παραμέτρου β από $\beta=86$ μέχρι $\beta=151$, δηλαδή προς τα δεξιά, "χαλώντας" ακόμα περισσότερο το σχήμα (πρώτα 3 δευτερόλεπτα στο βίντεο στο Σχήμα 4α). Αμέσως, ο M2 άλλαξε τακτική και έσυρε την τιμή της παραμέτρου β μέχρι την τιμή $\beta=13$, ώστε να "φτιάξει" το σχήμα (επόμενα 2 δευτερόλεπτα στο βίντεο στο Σχήμα 4α). Στο πρώτο αυτό απόσπασμα, ο M2 δεν ήταν σε θέση να συντονίσει άμεσα την κίνηση της παραμέτρου β, προσεγγίζοντας το είδος *αποσπαστικής συντονισμού* (E0). Για το υπόλοιπο μέρος του βίντεο του Σχήματος 4α, ο M2 φαίνεται να ξεκινάει κάθε φορά που θέλει να "φτιάξει" το σχήμα, προς την κατάλληλη κατεύθυνση, αλλά να μην πετυχαίνει αμέσως την τιμή ισορροπίας για το β. Την προσέγγιζε αρχικά στο περίπου και με ένα-δύο κινήσεις δεξιά-αριστερά, κατάφερε σταδιακά να την προσεγγίζει όλο και περισσότερο, ακολουθώντας την πρακτική δοκιμή-και-σφάλμα. Αυτού του είδους η δημιουργική δράση συνάδει με το E1 *προ-συντονισμού* και το E2 *αδρούς συντονισμού*, καθώς η αντιστοίχιση τιμών των παραμέτρων α και β γινόταν προσεγγιστικά σε κάθε διαδοχική αυξομείωση, με τον M2 να ακολουθεί τη σωστή κατεύθυνση μεταβολής, όπως οριζόταν από τον M1. Σε αυτό το κρίσιμο συμβάν, τόσο τα ψηφιακά εργαλεία και η αισθητική διάσταση του δυναμικού σχήματος, αλλά και οι κινήσεις του M1 που καθόριζαν το "χάλασμα"

του σχήματος, φάνηκε να συνδιαμορφώνουν την αλλαγή του τρόπου έκφρασης της συμμεταβολής από τον M2.

Μετά από την ολοκλήρωση των πρώτων τεσσάρων χορογραφιών "χάλασμα-φτιάξιμο" για το ίδιο τραγούδι (συνολική διάρκεια κινήσεων: 336 δευτερόλεπτα), οι μαθητές της Ο1 ανέπτυξαν ενσώματο συμμεταβολικό συλλογισμό που προσέγγιζε το είδος *συντονισμού τιμών* (E3). Αρχικά, πριν ξεκινήσουν τον πέμπτο γύρο χορογραφίας, συνεννοήθηκαν προφορικά τον τρόπο συντονισμένης κίνησης:

M1: Κατάλαβες πώς θα το κάνουμε; Σε κάθε αλλαγή. Θα ακολουθούμε τις νότες. Όταν πάει ψηλά θα πάμε ψηλά. Εσύ απλά ακολούθα εμένα.

M2: Οκ.

Όπως φαίνεται στο βίντεο του Σχήματος 4β, η χορογραφία του πέμπτου γύρου ήταν μία προσπάθεια αποτύπωσης της προαναφερόμενης ιδέας μέσω συμμεταβολικού συντονισμού. Όπως παρατηρείται σε όλη τη διάρκεια του βίντεο, και συγκρίνοντας το με προηγούμενο συμβάν, φαίνεται ότι και οι δύο μαθητές έχουν εξελίξει τον συλλογισμό τους. Από τη μία πλευρά, ο M1 φαίνεται να "ακολουθεί" τις νότες, ρυθμίζοντας το εύρος, τον ρυθμό και την κατεύθυνση της μεταβολής της οριζόντιας κίνησης του χεριού του ώστε να ταιριάζει με τον ρυθμό και τη μελωδία της μουσικής. Από την άλλη πλευρά, ο M2 "ακολουθούσε το χορευτικό", κινώντας το ποντίκι προς την ίδια κατεύθυνση που κινούταν και το α με τον μισό ρυθμό μεταβολής. Οι αλλαγές των τιμών, λοιπόν, αν και ετεροχρονισμένες, ήταν προς την ίδια κατεύθυνση και κατέληγαν να ικανοποιούν τη σχέση $a=2\beta$. Προσέγγισε, έτσι, τα επίπεδα E3 (*συντονισμός τιμών*) και E4 (*αποσπασματικός συντονισμός*), καθώς οι κινήσεις του έγιναν πιο σταθερές και στοχευμένες ώστε η τιμή του β να πάρει τη μισή τιμή του α και να "φτιάξει" το χαλασμένο σχήμα. Σε κάποια διαστήματα, μάλιστα, οι αλλαγές γίνονταν και σχεδόν ταυτόχρονα - με το β να κινείται στο μισό διάστημα τιμών από το α. Ωστόσο, ο παρακάτω διάλογος μεταξύ της Ο1 (M1, M2) και της ερευνήτριας (Ε) υποδεικνύει ότι οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να εκφράσουν λεκτικά τη διαφορά στον ρυθμό κίνησης του α και του β:

Ε: Το κάνετε να χορεύει πολύ καλά! Πώς το καταφέρατε;

M1: Ακολουθούσαμε τη μουσική. Και ο (όνομα M2) εμένα.

Ε: Και όταν τον ακολουθείς εσύ, τι κάνεις ακριβώς;

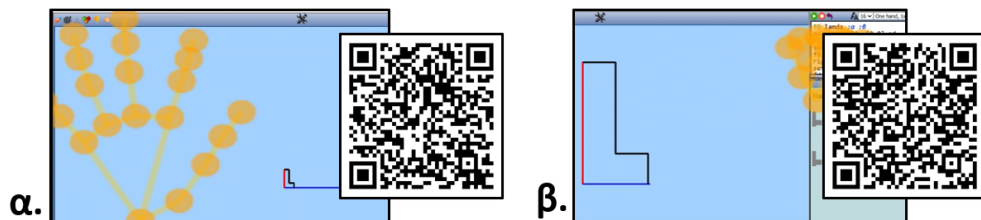
M2: Πάω όπου πάει.

Ε: Τι εννοείς όπου πάει;

M2: Κάνω την ίδια κίνηση.

Ε: Με τον ίδιο ρυθμό;

M2: Ναι.



Σχήμα 4. (α) Απόσπασμα-βίντεο ([link](#)) από την αρχική εμπλοκή της Ο1 με τη δραστηριότητα της πρώτης φάσης. (β) Απόσπασμα-βίντεο ([link](#)) από την τελική εμπλοκή της Ο1 με τη δραστηριότητα της πρώτης φάσης.

Μέχρι το τέλος των δύο φάσεων, όπου όλα τα παιδιά στην ομάδα τους είχαν χειριστεί μέσω του ενός χεριού τους τις τιμές των παραμέτρων α και β εναλλάξ στο σύστημα ποντίκι-χέρι, κανένα δεν εξέφρασε προφορικά τη συσχέτιση στον τρόπο μεταβολής των δύο ποσοτήτων μεταξύ κάθε δύο διαδοχικών καταστάσεων "από ισορροπία σε μη ισορροπία" (με την μεταβολή του α) και "από μη ισορροπία σε ισορροπία" (με την μεταβολή του β) - παρόλο που αυτές οι μεταβολές ήταν πλήρως εναρμονισμένες μέσω της κίνησής τους. Η κοινή χορογραφική ιδέα του "χαλάσματος-φτιαξίματος" της ισορροπίας του σχήματος στον ρυθμό και τη μελωδία του τραγουδιού ακολουθήθηκε για όλη τη διάρκεια των δύο φάσεων από όλες τις ομάδες, παρά την προτροπή (προς το τέλος κάθε φάσης) να φτιάξουν ελεύθερα μία χορογραφική ιδέα. Ωστόσο, όπως αναλύεται και στην επόμενη υποενότητα, η τρίτη φάση οδήγησε σε ποικίλες χορογραφικές ιδέες την τελική ώρα του αυτοσχεδιασμού, οδηγώντας σε νέες δημιουργικές δράσεις συμμεταβολικού συντονισμού κατευθυνόμενες από δυναμικά εξελισσόμενα αισθητικά κριτήρια.

Συντονίζοντας τα δύο χέρια: από αδρό σε ομαλά συνεχές συντονισμό

Στην τρίτη φάση, το κάθε μέλος της κάθε ομάδας παιδιών χειριζόταν τις τιμές της μία παραμέτρου μέσω του ενός χεριού του (σύστημα χέρι-χέρι). Αυτή η αλλαγή οδήγησε σε νέους διαφοροποιημένους τρόπους ενσώματης έκφρασης του συμμεταβολικού συλλογισμού, οι οποίοι ακολούθησαν διάφορα στάδια εξέλιξης και εντοπίστηκαν με παρόμοιο τρόπο σε τρεις ομάδες (Ο1, Ο3, και Ο4). Τα ακόλουθα κρίσιμα συμβάντα προέρχονται από την Ο4 και αποτελούν παραδείγματα των τριών διακριτών ειδών ενσώματου συμμεταβολικού συλλογισμού καθοδηγούμενο από την χορογραφική ιδέα: το γράμμα "L" να αυξομειώνεται στον ρυθμό της μουσικής, ενώ παραμένει συνεχώς κλειστό (σε κατάσταση ισορροπίας).

Το πρώτο είδος ενσώματου συμμεταβολικού συλλογισμού χαρακτηρίζεται από την προσπάθεια των μαθητών να ελέγξουν τις δύο παραμέτρους (α και β) με ταυτόχρονες κινήσεις, διατηρώντας τον ίδιο ρυθμό, ο οποίος ταίριαζε με τη μουσική (βίντεο στο Σχήμα 5α). Οι μαθήτριες Μ7 και Μ8 κινούσαν από ένα χέρι: η Μ7 με το αριστερό κινούσε τον ολισθητή της παραμέτρου β και η Μ8 το δεξί αυτόν της παραμέτρου α . Όπως φαίνεται στο βίντεο, το χέρι της Μ7 πήγαινε προς την ίδια κατεύθυνση με τη Μ8 και με τον ίδιο ακριβώς ρυθμό, σε κάθε αύξηση (κίνηση προς τα δεξιά) ή μείωση (κίνηση προς τα αριστερά) των τιμών και του μήκους του σχήματος. Μετά από κάθε ολοκλήρωση ταυτόχρονων κινήσεων, η τιμή της παραμέτρου β είχε ως αποτέλεσμα να απέχει πολύ από το μισό της παραμέτρου α , ώστε να ικανοποιείται το κριτήριο ισορροπίας. Στη συνέχεια, η Μ8 κρατούσε σταθερό το χέρι της και προέτρεπε την Μ7 να κινηθεί "πάνω" ή "κάτω", ώστε το σχήμα να κλείσει και να συνεχίσουν στην επόμενη απόλυτα συγχρονισμένη κίνηση. Οι κινήσεις αυτές υποδεικνύουν την ανάπτυξη *αδρού συντονισμού* (Ε2) και κατευθύνονταν πλήρως από τον μουσικό ρυθμό, ακολουθώντας την ίδια κατεύθυνση (θετική ή αρνητική), αλλά χωρίς να εστιάζουν στον μεταξύ τους συντονισμό ρυθμού μεταβολής.

Αυτή η τακτική οδήγησε στην μετάβαση προς την ενδιάμεση φάση εμπλοκής της Ο4, με σκοπό να "εξασκηθεί" για να πετύχει τον ομαλό συντονισμό για την αρχική χορογραφική ιδέα. Τότε η Μ8 πρότεινε το εξής: "Πάμε να ξανακάνουμε το χάλασμα-φτιαξίμο για να το βρούμε μία πάλι;". Στο απόσπασμα που φαίνεται στο βίντεο του Σχήματος 5β, οι μαθήτριες σταμάτησαν να κινούνται ταυτόχρονα και άρχισαν να ελέγχουν τις παραμέτρους διαδοχικά, όπως έκαναν στην πρώτη φάση. Πρώτα η Μ8 κινούσε τον ολισθητή της παραμέτρου α με το δεξί (μωβ) χέρι, "χαλώντας" το σχήμα, και στη συνέχεια η Μ7 κινούσε αυτόν της παραμέτρου β με το αριστερό (πορτοκαλί) χέρι, εστιάζοντας πλέον στις αριθμητικές τιμές των μεταβλητών (α και β) στην οθόνη. Δημιουργούσαν, έτσι, διαδοχικά ζευγάρια τιμών παραμέτρων που ικανοποιούσαν τη σχέση $\alpha=2\beta$, αναπτύσσοντας *συντονισμό διακριτών τιμών* (Ε3). Αυτή η

μετάβαση σηματοδοτεί την μετατόπιση από το αισθητικό κριτήριο να "ακολουθούν τον ρυθμό", στο κριτήριο "να κλείνει το σχήμα σε κάθε βήμα". Οι μαθήτριες πλέον προσπαθούν να ικανοποιήσουν αυτήν τη συνθήκη του δυναμικού ψηφιακού δομήματος μέσω προσεκτικών και στοχευμένων διαδοχικών κινήσεων.



Σχήμα 5. (α) Απόσπασμα-βίντεο ([link](#)) από την αρχική εμπλοκή της Ο4 με τη δραστηριότητα της τρίτης φάσης. (β) Απόσπασμα-βίντεο ([link](#)) από την ενδιάμεση εμπλοκή της Ο4. (γ) Απόσπασμα-βίντεο ([link](#)) από την τελική εμπλοκή της Ο4.

Το τρίτο είδος ενσώματου συμμεταβολικού συλλογισμού της Ο4 αποτελεί ένδειξη ανάπτυξης *αποσπασματικά συνεχούς* (Ε4) και *ομαλά συνεχούς συντονισμού* (Ε5) για διαδοχικά διαστήματα συντονισμένης αύξησης ή μείωσης του μήκους του σχήματος. Το είδος αυτό εμφανίστηκε μετά από περίπου 15 λεπτά ανάδυσης των πρώτων δύο ειδών ενσώματου συμμεταβολικού συλλογισμού που περιγράφονται παραπάνω - με το πρώτο να επανεμφανίζεται και μετά την ανάπτυξη του δεύτερου. Οι μαθήτριες επέστρεψαν σύντομα στην ιδέα της ταυτόχρονης κίνησης, αυτή τη φορά όμως με σταδιακή διαφοροποίηση στους ρυθμούς κίνησης των χεριών. Συγκεκριμένα, όπως αποτυπώνεται στο βίντεο του Σχήματος 5γ, η Μ8 που έλεγχε την παράμετρο α κινούσε το χέρι της με σχεδόν διπλάσια ταχύτητα από την Μ7 που έλεγχε την παράμετρο β. Αυτή η εκλεπτυσμένη κινητική διαφοροποίηση ως προς τον ρυθμό μεταβολής αποκαλύπτει βαθύτερα νοήματα πάνω της συμμεταβολής των δύο ποσοτήτων, πλέον όχι μόνο ως αριθμητικής σχέσης, αλλά και ως αισθητικής και σωματικής εμπειρίας ομαλού συντονισμού. Το αποτέλεσμα είναι το γράμμα "L" να παραμένει για κάποια δευτερόλεπτα σταθερά κλειστό, με τις κινήσεις των μαθητών να αποτελούν μια αρμονική με τον ρυθμό και τη μελωδία "χορογραφία" που ενσωματώνει ενσώματα τη σχέση $a = 2b$. Ωστόσο, στην τελική ερώτηση της ερευνήτριας, οι μαθήτριες της Ο4, όπως και καμίας άλλης ομάδας, δεν ήταν σε θέση να εκφράσουν λεκτικά το είδος συσχέτισης της κίνησής τους:

Ε: Παρατηρήσατε κάποια σχέση στον τρόπο που κινούσατε τα χέρια;

Μ8: Μου φαίνεται ότι ήταν λίγο διαφορετικός.

Ε: Διαφορετικός, δηλαδή;

Μ8: Κάποιες φορές ήταν το ένα πιο γρήγορο από το άλλο και μετά άλλαζε.

Συμπεράσματα

Η μελέτη αυτή ανέδειξε μορφές ενσώματου, αισθητικά καθοδηγούμενου συμμεταβολικού συλλογισμού που αναδείχθηκαν μέσα από δημιουργικές δράσεις των συμμετεχόντων μαθητών/τριών, σε πλαίσιο σχεδιασμού και εκτέλεσης χορογραφίας ψηφιακών γεωμετρικών σχημάτων. Οι δημιουργικές αυτές δράσεις, όπως προσεγγίζονται εδώ υπό νεο-υλιστική σκοπιά, περιλάμβαναν ενσώματα και αισθητικά καθοδηγούμενη έκφραση υπό κατασκευής νοήματος μέσα από τη διάδραση των χεριών των παιδιών (μεταξύ τους και με το ψηφιακό

εργαλείο), της μουσικής, της μαθηματικής δομής, του εργαλείου, του δυναμικού σχήματος και της υπό συνεννόησης καλλιτεχνικής πρόθεσης, και αίσθησης για "όμορφη" χορευτική μορφή. Αυτή η συνάρμωση (assemblage) φάνηκε να υποστηρίζει πλούσιες μορφές σωματικής-αισθητικής μαθηματικής σκέψης, οι οποίες ίσως δύσκολα θα μπορούσαν να προβλεφθούν σε πιο εργαλειακές μορφές διάδρασης ώστε να ενσωματωθούν στον σχεδιασμό του εργαλείου. Τα παιδιά, στην προσπάθειά τους να "κλείσουν σωστά" το γράμμα ή να "ταυριάζει η κίνηση με τη μουσική", βίωναν τη συμμεταβολή ως αισθητικό συμβάν, και όχι ως "διεκπεραιωτική" σχέση: η μαθηματική δομή δεν "εφαρμόζεται", αλλά παράγεται δυναμικά και "χορεύεται".

Τα είδη συλλογισμού που αναπτύχθηκαν κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας της πρώτης φάσης παρουσίασαν κοινά μοτίβα στις τέσσερις ομάδες με διαφοροποιήσεις ανάμεσα στις φάσεις κατά τις οποίες υπήρχε διάδραση χεριού-ποντικίου (φάσεις 1,2) και στην τρίτη φάση που υπήρχε διάδραση δύο χεριών. Οι μορφές αυτές προσεγγίζουν θεωρητικά κάποια από τα επίπεδα του πλαισίου των Thompson και Carlson (2017), τα οποία ωστόσο εκφράζονται και αναλύονται ως "ενσώματα" και "αισθητικά καθοδηγούμενα". Από τη μία πλευρά, στις πρώτες δύο φάσεις που περιλάμβαναν διάδραση ποντικίου-χεριού, τα παιδιά χειρίζονταν τις παραμέτρους ετεροχρονισμένα και σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητα. Επίσης, τα παιδιά που χειρίζονταν το ποντίκι δεν εξέφρασαν συλλογισμό συνεχούς μεταβολής της παραμέτρου (β ή a αντίστοιχα) όσο τα παιδιά που χρησιμοποιούσαν το χέρι, κάνοντας γενικά πιο απότομες κινήσεις. Έτσι, όλες οι ομάδες περιορίστηκαν κυρίως σε επίπεδα *απουσίας συντονισμού* (E0), *προ-συντονισμού* (E1), φτάνοντας μέχρι το επίπεδο του *συντονισμού τιμών* (E3). Παράλληλα, οι χορογραφικές ιδέες περιορίστηκαν στην τεχνική "χάλασμα-φτιάξιμο" το οποίο ταίριαζαν με τον ρυθμό και τη μελωδία της μουσικής. Από την άλλη πλευρά, η διάδραση χέρι-χέρι της τρίτης φάσης, όπου τα παιδιά κινούνταν σε κοινό κινητικό πεδίο (σε μια νοητή οριζόντια ευθεία απέναντι από την κάμερα του υπολογιστή), ευνόησε την ανάπτυξη πιο εκλεπτυσμένων μορφών ενσώματου συμμεταβολικού συλλογισμού, όπως ο *αποσπασματικά* (E4) και *ομαλά συνεχές συντονισμός* (E5). Οι χορογραφικές ιδέες που εκφράστηκαν ήταν πιο πλούσιες και περιλάμβαναν συγχρονισμένη κίνηση και των δύο χεριών - είτε για συγχρονισμένη αυξομείωση του κλειστού σχήματος (όπως φαίνεται στα τελευταία κρίσιμα συμβάντα), είτε για "συγχρονισμένο χάλασμα" και "συγχρονισμένο φτιάξιμο". Παρά τον σωματικό συντονισμό, καμία ομάδα δεν εξέφρασε προφορικά τη γραμμική συμμεταβολή ($a=2\beta$) με αποσπασματικά ή ομαλά συνεχή τρόπο, αναγνωρίζοντας ότι το χέρι που αντιστοιχούσε στην παράμετρο a κινούνταν με τη διπλάσια ταχύτητα από ότι το χέρι της παραμέτρου β . Υποδεικνύεται, έτσι, η δυνατότητα ανεξάρτητης ανάπτυξης εκλεπτυσμένου ενσώματου συμμεταβολικού συλλογισμού σε αυτές τις μικρές ηλικίες (10-11 ετών). Ωστόσο, το μικρό μέγεθος δείγματος, η υλοποίηση σε ένα μόνο σχολικό πλαίσιο και η σύντομη διάρκεια της παρέμβασης, σε συνδυασμό με την εξάρτηση από ποιοτική ανάλυση και την ενδεικτική αντιστοίχιση στα επίπεδα E0-E5, περιορίζουν τη γενικευσιμότητα των ευρημάτων και απαιτούν προσεκτική ερμηνεία. Μελλοντική έρευνα αναμένεται να επεκτείνει τη μελέτη σε μεγαλύτερα, πιο διαφοροποιημένα δείγματα και χρονικό διάστημα, να εξετάσει άλλες αναλογίες και μη γραμμικές σχέσεις, καθώς και να προχωρήσει σε περαιτέρω θεωρητικοποίηση και επέκταση του μοντέλου των Thompson και Carlson υπό νεο-υλιστική σκοπιά, ώστε να αποτυπώνεται πληρέστερα ο ενσώματος ΑΚΣΣ.

Σημείωση

Η παρούσα έρευνα χρηματοδοτείται από το έργο HORIZON-WIDERA "TransEET" (Transforming Education with Emerging Technologies - No. 101078875) του European Research Executive Agency - REA.

Αναφορές

- Abrahamson, D., Nathan, M. J., Williams-Pierce, C., Walkington, C., Ottmar, E. R., Soto, H., & Alibali, M. W. (2020, August). The future of embodied design for mathematics teaching and learning. In *Frontiers in Education* (Vol. 5, p. 147). Frontiers Media SA. <https://doi.org/10.3389/feduc.2020.00147>
- Bagossi, S. (2024). Second-order covariation: enlarging the theoretical framework of covariational reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 1-22. <https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2393889>
- Barad, K. (2003). Posthumanist performativity: Toward an understanding of how matter comes to matter. *Signs: Journal of Women in Culture and Society*, 28(3), 801-831. <https://doi.org/10.1086/345321>
- Basu, D., & Panorkou, N. (2019). Integrating covariational reasoning and technology into the teaching and learning of the greenhouse effect. *Journal of Mathematics Education*, 12(1), 6-23.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378. <https://doi.org/10.2307/4149958>
- de Freitas, E., & Sinclair, N. (2013). New materialist ontologies in mathematics education: The body in/of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 453-470. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9465-z>
- Ferretti, F., Giberti, C., Bagossi, S., Taranto, E., & Arzarello, F. (2024). Embodied instrumented covariation: The tracer in primary school. *For the Learning of Mathematics*, 44(3), 29-35.
- Karavakou, M., & Kynigos, C. (2025). Dancing with trigonometric functions: aesthetically guided covariational reasoning while creating periodic dynamic models. *Proceedings of the Fourteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME14)*. CERME.
- Karavakou, M., Kynigos, C., & Sinclair, N. (2023). Bridging disciplinary aesthetics: when mathematics meets art through educational technology. *Frontiers in Education*, 8, 1284718. <https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1284718>
- Latsi, M., & Kynigos, C. (2022). Mathematical assemblages around dynamic aspects of angle in digital and physical space. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(8), 1677-1698. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10225-7>
- Pittalis, M., Sproesser, U., & Demosthenous, E. (2024). Graphically representing covariational functional situations in an interactive embodied digital learning environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 56(6), 1083-1113. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2327552>
- Sinclair, N., De Freitas, E., & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: The murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 45(2), 239-252. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0465-3>
- Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). National Council of Teachers of Mathematics.