

Η διδασκαλία της γωνίας μέσω προγραμματισμού με το Scratch

Κακαβάς Κωνσταντίνος¹, Ζαχάρος Κωνσταντίνος², Σκοπελίτη Ειρήνη³, Κόμης Βασίλειος⁴

kkakavas@upatras.com, zacharos@upatras.gr, eskoipel@upatras.gr, komis@upatras.gr

¹ Υποψήφιος Διδάκτορας, Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η, Πανεπιστήμιο Πατρών

² Καθηγητής, Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η, Πανεπιστήμιο Πατρών

³ Επίκουρη Καθηγήτρια, Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η, Πανεπιστήμιο Πατρών

⁴ Καθηγητής, Τ.Ε.Ε.Α.Π.Η, Πανεπιστήμιο Πατρών

Περίληψη

Η παρούσα εργασία αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης έρευνας που στοχεύει στη διδασκαλία της έννοιας της γωνίας με τη χρήση του προγραμματιστικού περιβάλλοντος Scratch. Το περιβάλλον αυτό χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή ψηφιακών προσομοιώσεων καταστάσεων της πραγματικής ζωής από τους μαθητές, με στόχο την προσέγγιση πτυχών της έννοιας της γωνίας. Στην έρευνα συμμετείχαν 35 μαθητές της Στ' τάξης από δύο Δημοτικά Σχολεία της Πάτρας, οι οποίοι διδάχθηκαν την «αλλαγή διεύθυνσης», ως πτυχή της έννοιας της γωνίας. Οι μαθητές εργάστηκαν με το περιβάλλον οπτικού προγραμματισμού Scratch ώστε να σχεδιάσουν σύνολα εντολών που μπορούν να προσομοιώσουν με ορθό τρόπο τις συνθήκες που περιγράφονται στο σενάριο που τους δόθηκε. Η έρευνα έδειξε ότι οι μαθητές είναι ικανοί να σχεδιάζουν ψηφιακές προσομοιώσεις πραγματικών καταστάσεων γωνίας και να προσεγγίζουν με δυναμικό τρόπο την έννοια αυτή.

Λέξεις κλειδιά: διδασκαλία γωνίας, ψηφιακές προσομοιώσεις Scratch

Εισαγωγή

Στο σημερινό δημοτικό σχολείο η έννοια της γωνίας αποτελεί μια βασική μαθηματική έννοια που προσεγγίζεται στο πλαίσιο της Γεωμετρίας. Παράλληλα, η έννοια αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί ως πολυδιάστατη, αφού ακόμα και ο ορισμός της δεν διατυπώνεται με έναν μοναδικό και συγκεκριμένο τρόπο, αλλά διατυπώνεται υπό το πρίσμα των πτυχών που τη συνθέτουν. Σύμφωνα με τους Henderson & Taimina (2005) κανένας επίσημος ορισμός της έννοιας τη γωνίας από όσους έχουν διατυπωθεί δεν μπορεί να συμπεριλάβει όλες τις πτυχές της εμπειρίας μας σχετικά με το τι είναι γωνία.

Οι Devichi & Munier (2013), προσπαθώντας να παρουσιάσουν μια κατηγοριοποίηση των διαστάσεων της έννοιας της γωνίας, πρότειναν τον ορισμό της με τρεις διαφορετικούς τρόπους: α) ως γωνία περιστροφής (rotation angle), β) ως γωνία τομέα (sector angle), δηλαδή την ποσότητα του χώρου που σχηματίζει ένας γωνιακός τομέας, και γ) ως μισές γραμμές ή ημιευθείες που εκτείνονται από ένα κοινό σημείο. Άλλοι ερευνητές (Close, 1982; Kieran, 1986; Scally, 1986) δίνοντας έμφαση στα φυσικά χαρακτηριστικά της κατάστασης μέσα στην οποία εμφανίζεται η γωνία, διέκριναν τον στατικό και τον δυναμικό χαρακτήρα της. Σύμφωνα με τη στατική θεώρηση, η γωνία παραμένει αμετάβλητη και το μέτρο της παραμένει σταθερό, όπως η γωνία σε ένα κάδρο. Αντίθετα, η δυναμική θεώρηση της γωνίας συνδέεται με τις περιπτώσεις εκείνες που το μέγεθος της γωνίας έχει τη δυνατότητα να μεταβάλλεται, όπως το άνοιγμα ή το κλείσιμο ενός ψαλιδιού. Μια αρκετά λεπτομερή κατηγοριοποίηση της έννοιας της γωνίας έχουν διατυπώσει οι Mitchelmore & White (1998) ορίζοντας 7 υποκατηγορίες-πτυχές της (περιστροφή, συνάντηση, κλίση, γωνία αντικειμένου, στροφή, διεύθυνση, άνοιγμα-χώρος). Συνεπώς, οι πολλές διαστάσεις της έννοιας της γωνίας μπορούν να

καθορίσουν και τα όρια μιας ερευνητικής προσπάθειας για την προσέγγισή της.

Η παρούσα έρευνα σκοπό έχει να μελετήσει την έννοια της γωνίας ως «αλλαγή διεύθυνσης» με τη χρήση της γλώσσας οπτικού προγραμματισμού Scratch, δίνοντας έμφαση στα δυναμικά χαρακτηριστικά της γωνιακής αυτής κατάστασης. Για τον σκοπό αυτό, σχεδιάστηκε μια διδακτική πρόταση ώστε να μελετηθεί η «αλλαγή διεύθυνσης» μέσα από την εκτροπή της βελόνας μιας πυξίδας όταν κοντά της τοποθετείται ένας μαγνήτης. Η έρευνα αξιοποιεί τις δυνατότητες του οπτικού προγραμματισμού για την κατασκευή ψηφιακής προσομοίωσης της κατάστασης της πυξίδας, όπου οι μαθητές προσπαθούν να δείξουν στο ψηφιακό περιβάλλον την εκτροπή της βελόνας εξαιτίας του μαγνήτη.

Εφαρμογές ψηφιακής τεχνολογίας

Διάφορες εφαρμογές της ψηφιακής τεχνολογίας έχουν χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία της γωνίας. Σύμφωνα με τους Browning et al., (2007) η χρήση της τεχνολογίας προτείνεται ως λύση για την ενασχόληση των μαθητών με καταστάσεις που περιλαμβάνουν τη δυναμική θεώρηση της γωνίας. Διατυπώνοντας την ίδια άποψη, οι Kynigos et al., (2009) προτείνουν την οπτικοποίηση μέσω ψηφιακών δυναμικών περιβαλλόντων μάθησης που χρησιμοποιούν την υπολογιστική τεχνολογία. Η έρευνα του Zaranis (2014) έδειξε θετική συνεισφορά της χρήσης κατάλληλου λογισμικού στη διδασκαλία των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων σαν εργαλείο οπτικοποίησης και μαθηματικής εξήγησης.

Ιδιαίτερη εφαρμογή στη διδασκαλία της γωνίας ως «διαδρομή» και ως ιδιότητα γεωμετρικών σχημάτων έχουν τα λογισμικά τύπου LOGO. Σε αυτά τα ψηφιακά περιβάλλοντα οι μαθητές με τη χρήση εντολών προσπαθούν είτε να κινήσουν διάφορα αντικείμενα προς έναν στόχο δείχνοντας τη διαδρομή που το αντικείμενο ακολουθεί είτε προσπαθούν να σχεδιάσουν διάφορα πολύγωνα, η κατασκευή των οποίων απαιτεί μεταξύ άλλων και τον δυναμικό χειρισμό της γωνίας. Έρευνες με τη χρήση τέτοιων λογισμικών έχουν δείξει σημαντικά μαθησιακά οφέλη σχετικά με την κατανόηση της έννοιας της γωνίας (Bartolini Bussi & Baccaglini, 2015; Fessakis et al., 2013; Morgan & Alshwaikh, 2012).

Άλλοι ερευνητές (Balomenou et al., 2019; Chang et al., 2014; Fahlgren & Brunström, 2014) έδειξαν την επίδραση προγραμμάτων προσομοίωσης, όπως το Cabri Geometer, στη διδασκαλία της γωνίας με έμφαση στον δυναμικό ορισμό της. Καθώς η περιστροφή δεν μπορεί να παρουσιαστεί σε ένα φύλλο χαρτιού κάποιοι ερευνητές (Browning et al., 2007; Clements & Burns, 2000) προτείνουν την οπτικοποίηση μέσω ψηφιακών δυναμικών περιβαλλόντων μάθησης που χρησιμοποιούν την ψηφιακή τεχνολογία.

Σήμερα, με την ανάπτυξη των γλωσσών προγραμματισμού διευρύνονται οι ψηφιακές τεχνολογίες που μπορούν να υποστηρίξουν τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Ειδικότερα, για τον χώρο της Γεωμετρίας, υποστηρίζεται ότι οι γλώσσες οπτικού προγραμματισμού μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εμπλουτίσουν τη διδασκαλία αυτής της μαθηματικής περιοχής με νέες δραστηριότητες (Ke, 2014). Ταυτόχρονα, η διδασκαλία με τη χρήση του οπτικού προγραμματισμού φαίνεται να μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση διαφόρων πτυχών της έννοιας της γωνίας και να βελτιώσει τις παρανοήσεις που παρατηρούνται στους μαθητές (Κακαβάς κ.ά., 2019). Στο πλαίσιο αυτό, η παρούσα έρευνα στοχεύει στην προσέγγιση της γωνίας ως «αλλαγή διεύθυνσης» με τη χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Scratch σε δραστηριότητα κατασκευής ψηφιακής προσομοίωσης του πραγματικού κόσμου.

Ερευνητικά Ερωτήματα

1. Ο σχεδιασμός ψηφιακών προσομοιώσεων με τη χρήση οπτικού προγραμματισμού μπορεί να έχει μαθησιακά οφέλη για την κατανόηση της «αλλαγής διεύθυνσης», ως

πιτυχή της έννοιας της γωνίας;

2. Με ποιο τρόπο εργάζονται οι μαθητές στο προγραμματιστικό περιβάλλον ώστε να αξιοποιήσουν τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της κατάστασης της «αλλαγής διεύθυνσης» (μέγεθος γωνίας, κατεύθυνση αλλαγής διεύθυνσης, διάρκεια περιστροφής κλπ.);

Μέθοδος

Η παρούσα έρευνα αποτελεί μια μελέτη περίπτωσης και σχεδιάστηκε αξιοποιώντας το μοντέλο του ερευνητικού σχεδιασμού (design-based research) για τη μελέτη των διδακτικών παρεμβάσεων μέσα σε αυθεντικό περιβάλλον μάθησης (Wang & Hannafin, 2005). Η έρευνα βασίστηκε στη συμμετοχική παρατήρηση όπου ο ερευνητής συμμετείχε και ως διδάσκων σε συνθήκες πραγματικής τάξης. Για την υλοποίησή της χρησιμοποιήθηκαν διάφοροι τύποι εργαλείων και διαδικασιών για τη συλλογή δεδομένων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε το σύνολο των εντολών που επέλεξαν οι μαθητές για την ολοκλήρωση της ψηφιακής προσομοίωσης με τη χρήση του οπτικού προγραμματισμού, η ψηφιακή καταγραφή των ενεργειών που έκαναν στην οθόνη τους, καθώς και οι απαντήσεις από το Φύλλο Εργασίας που κλήθηκαν να συμπληρώσουν. Για τη λεπτομερέστερη αξιοποίηση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε ανάλυση σε ποσοτικό και ποιοτικό επίπεδο.

Δείγμα

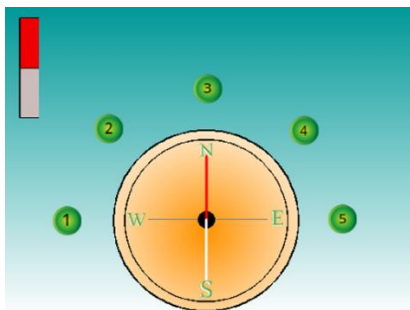
Στην έρευνα συμμετείχαν 35 μαθητές της Στ' τάξης που φοιτούσαν σε δύο διαφορετικά τμήματα δύο σχολείων της Πάτρας. Οι μαθητές αυτοί είχαν διδαχθεί την έννοια της γωνίας σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα κατά τη φοίτησή τους στις προηγούμενες τάξεις και δεν είχαν διδαχθεί ποτέ την έννοια της γωνίας με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών και ψηφιακών εφαρμογών. Επίσης, οι μαθητές αυτοί δεν είχαν διδαχθεί προγραμματισμό με Scratch και ήταν η πρώτη τους εμπειρία με τον οπτικό προγραμματισμό και τη χρήση του στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Παρόλα αυτά, σημειώνεται ότι ο σχεδιασμός της παρούσας ψηφιακής προσομοίωσης αποτελεί την πέμπτη κατά σειρά προσομοίωση από το σύνολο των προσομοιώσεων που κλήθηκαν να σχεδιάσουν. Συνεπώς, τα αποτελέσματα της παρούσας εργασίας είναι αποτέλεσμα της σχετικής εμπειρίας που αποκόμισαν από την επαφή τους με τη χρήση του οπτικού προγραμματισμού.

Περιγραφή δραστηριότητας

Η συγκεκριμένη ψηφιακή προσομοίωση που κλήθηκαν να σχεδιάσουν οι μαθητές ήταν η περίπτωση της κίνησης της βελόνας μιας πυξίδας που αλλάζει τη διεύθυνσή της όταν τοποθετείται κοντά της ένας μαγνήτης. Η προσομοίωση αυτή είναι η πρώτη προσομοίωση από τις συνολικά τέσσερις προσομοιώσεις που σχετίζονται με τη γωνία ως «αλλαγή διεύθυνσης». Η εικόνα της πυξίδας που είχαν στη διάθεσή τους οι μαθητές παρουσιάζεται στο Σχήμα 1. Σε αυτό φαίνεται ότι η βελόνα της πυξίδας δείχνει τον βορρά (κόκκινο μέρος της βελόνας).

Ζητήθηκε από τους μαθητές να σχεδιάσουν μια προσομοίωση στην οποία να παρουσιάσουν την αλλαγή διεύθυνσης της βελόνας της πυξίδας όταν ο μαγνήτης τοποθετείται στα πέντε συγκεκριμένα σημεία που φαίνονται στην εικόνα. Τονίστηκε ότι η αλλαγή διεύθυνσης της βελόνας θα έπρεπε να ξεκινάει πάντα από το σημείο που βρίσκεται αρχικά η βελόνα, δηλαδή από το σημείο του Βορρά (σημείο 3) και να εκτρέπεται προς το σημείο 1, να ξεκινάει από το σημείο του Βορρά και να εκτρέπεται προς το σημείο 2 κ.ο.κ. Οι μαθητές ήταν ελεύθεροι να διαλέξουν τον προσανατολισμό στην κίνηση της βελόνας, καθώς

και το μέγεθος της γωνίας που απαιτείται για την αλλαγή της διεύθυνσής της έτσι ώστε να κατευθυνθεί προς τα πέντε προκαθορισμένα σημεία που θα βρεθεί ο μαγνήτης. Δινόταν στους μαθητές ένα σύνολο εντολών το οποίο δεν θα έπρεπε να αλλάξουν, καθώς αφορούσε στον σχεδιασμό του μοντέλου από τον ερευνητή και στη θέση που θα έπρεπε να βρίσκεται τοποθετημένη η πυξίδα και ο μαγνήτης. Οι μαθητές κλήθηκαν να συμπληρώσουν το δικό τους σώμα εντολών, έτσι ώστε το μοντέλο που θα σχεδιάζαν να προσομοιώνει την ορθή κίνηση που κάνει η βελόνα για κάθε περίπτωση.



Σχήμα 1. Αποτύπωση προσομοίωσης πυξίδας

Διαδικασία

Οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους. Ο κάθε μαθητής είχε ατομικό λογαριασμό στην επίσημη ιστοσελίδα του Scratch και χρησιμοποιώντας τα ατομικά του στοιχεία (όνομα χρήστη και κωδικό χρήστη) συνδεόταν σε αυτή. Στη συνέχεια οι μαθητές αναζήτησαν τη συγκεκριμένη ψηφιακή προσομοίωση, την οποία μπορούσαν να επεξεργαστούν προσθέτοντας το δικό τους σύνολο εντολών. Πριν ξεκινήσουν τη διαδικασία σύνταξης εντολών, οι μαθητές ενεργοποιούσαν το λογισμικό Bandicam, το οποίο κατέγραφε σε μορφή βίντεο τις κινήσεις τους πάνω στην οθόνη. Ακολούθως, επέλεξαν ελεύθερα τις επιμέρους εντολές ώστε να οδηγήσουν την πυξίδα στα πέντε προκαθορισμένα σημεία. Όταν ολοκλήρωναν τη δραστηριότητα αποθήκευαν το έργο τους στο προφίλ που είχε δημιουργηθεί στην ιστοσελίδα. Έπειτα, δινόταν σε αυτούς το Φύλλο Εργασίας όπου απαντούσαν τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Σημειώνεται ότι οι ψηφιακές προσομοιώσεις αξιολογήθηκαν ως σωστές αν έδειχναν με ορθό τρόπο την αλλαγή της διεύθυνσης της βελόνας της πυξίδας, ως ελλείψεις αν τα σύνολα εντολών που επέλεξαν περιλάμβαναν μόνο σωστού τύπου εντολών με το περιεχόμενο της δραστηριότητας (π.χ. στρίψε) αλλά δεν έδειχναν σωστά την αλλαγή διεύθυνσης της πυξίδας και ως λανθασμένες αν περιείχαν εντολές λανθασμένου τύπου (π.χ. άλλαξε ενδυμασία, παίξε ήχο κλπ.) και, επίσης, δεν έδειχναν σωστά την εκτροπή της βελόνας. Όσον αφορά την αξιολόγηση των απαντήσεων στο Φύλλο Εργασίας, πραγματοποιήθηκε ποιοτική ανάλυση δεδομένων από την οποία δημιουργήθηκαν κοινές κατηγορίες απαντήσεων και οι οποίες παρουσιάζονται στα αποτελέσματα της έρευνας.

Αποτελέσματα

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων συμπεριέλαβε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον τρόπο επίλυσης της δραστηριότητας με το λογισμικό Scratch και, παράλληλα, συμπεριέλαβε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εξέταση των Φύλλων Εργασίας που συμπλήρωσαν οι μαθητές. Παρακάτω παρουσιάζονται τα ευρήματα από τους δύο αυτούς άξονες ανάλυσης.

Ορθότητα προσομοιώσεων και τρόπος εργασίας στο λογισμικό

Ο Πίνακας 1 παρουσιάζει τον βαθμό επιτυχίας των μαθητών στη δραστηριότητα αυτή. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται η επίδοση των μαθητών στην προσπάθειά τους να σχεδιάσουν ψηφιακά την απόκλιση/εκτροπή της βελόνας της πυξίδας προς τα πέντε προκαθορισμένα σημεία.

Πίνακας 1. Βαθμός επιτυχίας προσομοίωσης της αλλαγής διεύθυνσης της πυξίδας

Βαθμός επιτυχίας	Εκτροπή προς σημείο 1	Εκτροπή προς σημείο 2	Εκτροπή προς σημείο 3	Εκτροπή προς σημείο 4	Εκτροπή προς σημείο 5
Σωστή	35	33	32	32	32
Ελλιπής	0	1	2	2	3
Λάθος	0	0	0	0	0
τίποτα	0	1	1	1	0
Σύνολο	35	35	35	35	35

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι οι μαθητές κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστές ψηφιακές προσομοιώσεις σε αρκετά υψηλό βαθμό, αφού αυτές αποτελούν περισσότερες από 32 περιπτώσεις για καθμία από τις πέντε διαφορετικές που κλήθηκαν να σχεδιάσουν. Ειδικότερα, φαίνεται ότι η αλλαγή της διεύθυνσης της βελόνας προς το σημείο 1 αποτελεί την ευκολότερη περίπτωση, καθώς το σύνολο των 35 μαθητών κατάφερε να τη σχεδιάσει σωστά. Συνεπώς, φαίνεται ότι η πλειονότητα των μαθητών μπορεί να ελέγξει και να χρησιμοποιήσει με σωστό τρόπο μια αλλαγή διεύθυνσης της βελόνας προς τη σωστή κατεύθυνση και ταυτόχρονα να χρησιμοποιήσει τη σωστή αριθμητική τιμή έτσι ώστε να οδηγήσει τη βελόνα στο σημείο που απαιτείται κάθε φορά.

Αξίζει να σημειωθεί, ότι κανένας μαθητής δεν σχεδίασε προσομοίωση χρησιμοποιώντας λανθασμένο σύνολο εντολών (π.χ. άλλαξε χρώμα, παίζε ήχο, άλλαξε υπόβαθρο κ.λπ.). Παρόλα αυτά, σε καθμία από τις πέντε διαφορετικές περιπτώσεις πολύ λίγοι είναι οι μαθητές (έως 3 μαθητές) οι οποίοι χρησιμοποιούν ελλιπές σύνολο εντολών. Τα σύνολα εντολών είτε σχετίζονται με αλλαγή διεύθυνσης προς την αντίθετη κατεύθυνση από την οποία πρέπει να εκτραπεί η βελόνα (π.χ. στην περίπτωση του σημείου 2, αντί να αλλάξει η διεύθυνση της βελόνας προς τα αριστερά, την κατευθύνουν προς τα δεξιά) είτε σχετίζονται με λανθασμένες αριθμητικές τιμές γωνίας οι οποίες δεν μπορούν να οδηγήσουν τη βελόνα προς το σημείο που απαιτείται (π.χ. στην περίπτωση του σημείου 5, αντί να στρίψουν τη βελόνα κατά 90° τη στρίβουν κατά 15°).

Όσον αφορά στη συνεξέταση των περιπτώσεων της αλλαγής διεύθυνσης προς το σημείο 1 και προς το σημείο 5, προκύπτουν χρήσιμα στοιχεία: Οι δύο αυτές περιπτώσεις είναι αντίστροφες περιπτώσεις αλλαγής διεύθυνσης, αφού για την περίπτωση του σημείου 1 απαιτείται αλλαγή διεύθυνσης προς τα αριστερά και μέγεθος γωνίας 90°, ενώ αντίστροφα για το σημείο 5 απαιτείται ίδιο μέγεθος γωνίας αλλά αλλαγή διεύθυνσης προς τα δεξιά. Οι μαθητές για να οδηγήσουν τη βελόνα στο σημείο 1 χρησιμοποιούν κατά κύριο λόγο την εντολή «στρίψε αριστερά 90°» (Σχήμα 2, παράδειγμα α), ενώ 4 μαθητές χρησιμοποιούν δομές επανάληψης (Σχήμα 2, παραδείγματα β και γ). Αντίστοιχα είναι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τον κώδικα που χρησιμοποιούν για την αλλαγή διεύθυνσης προς το σημείο 5. Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές για να σχεδιάσουν την προσομοίωση για το σημείο 5 διατηρούν τη στρατηγική που χρησιμοποίησαν για να σχεδιάσουν την προσομοίωση για το σημείο 1. Έτσι, αντισταμώνται την αντίστροφη διαδικασία που θα πρέπει να

ακολουθήσουν και αλλάζουν μόνο την κατεύθυνση της βελόνας διατηρώντας το μέγεθος της γωνίας. Επίσης, οι μαθητές που χρησιμοποίησαν για το σημείο 1 την εντολή «στρίψε αριστερά 90°» συνεχίζουν να τη χρησιμοποιούν αντίστοιχα και για το σημείο 5 με την εντολή «στρίψε δεξιά 90°». Η διατήρηση της στρατηγικής παρατηρήθηκε και στους μαθητές που για το σημείο 1 χρησιμοποίησαν δομές επανάληψης, καθώς οι 3 από τους 4 αυτούς μαθητές χρησιμοποίησαν τις ίδιες δομές επανάληψης και για το σημείο 5, αλλάζοντας μόνο τη διεύθυνση της κίνησης. Το Σχήμα 2 παρουσιάζει ενδεικτικά παραδείγματα εντολών που χρησιμοποίησαν τρεις μαθητές για την αλλαγή της διεύθυνσης της βελόνας προς το σημείο 1 και το Σχήμα 3 αντίστοιχα προς το σημείο 5.



Σχήμα 2. Σύνολα εντολών σωστών προσομοιώσεων για σημείο 1



Σχήμα 3. Σύνολα εντολών σωστών προσομοιώσεων για σημείο 5

Παρόμοια είναι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τη συνεξέταση των δύο άλλων περιπτώσεων αλλαγής διεύθυνσης, δηλαδή την αλλαγή προς το σημείο 2 και την αλλαγή προς το σημείο 4. Για την πρώτη περίπτωση απαιτείται μια αλλαγή διεύθυνσης προς τα αριστερά με μέγεθος γωνίας 45° και για τη δεύτερη περίπτωση μια αλλαγή διεύθυνσης προς τα δεξιά με μέγεθος γωνίας 45°. Από τους 33 μαθητές που σχεδίασαν σωστή προσομοίωση, οι 23 μαθητές χρησιμοποίησαν εντολές για αλλαγή διεύθυνσης προς τα αριστερά και κατά γωνία 45°, ένας μαθητής αντίστοιχη εντολή για αλλαγή διεύθυνσης προς τα αριστερά και κατά γωνία 40°, ενώ 9 ακόμα μαθητές χρησιμοποίησαν εντολές για αλλαγή διεύθυνσης κατά 50° (Σχήμα 4). Λόγω του σχήματος που δόθηκε στη δραστηριότητα, στο οποίο η αλλαγή διεύθυνσης κατά 40° και κατά 50° οδηγεί τη βελόνα της πυξίδας σε πολύ κοντινό σημείο σε σχέση με το σημείο που θα δείχνει αν αλλάξει διεύθυνση κατά 45°, έγιναν δεκτές ως σωστές οι απαντήσεις των 10 μαθητών που χρησιμοποίησαν τις γωνίες 40° και 50°. Όσον αφορά τη δεύτερη περίπτωση, από τους 32 μαθητές που σχεδίασαν σωστή προσομοίωση οι 23 μαθητές χρησιμοποίησαν εντολές για αλλαγή διεύθυνσης προς τα δεξιά και κατά γωνία 45°, ενώ οι υπόλοιποι 9 μαθητές χρησιμοποίησαν εντολές για ίδια αλλαγή διεύθυνσης αλλά κατά γωνία 50° (Σχήμα 5). Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν εντολές για γωνία 50° μοιρών είναι οι ίδιοι και για τις δύο περιπτώσεις (δηλ. για το σημείο 2 και το σημείο 4). Συνεπώς, και σε αυτό το ζεύγος αλλαγής διεύθυνσης της πυξίδας οι μαθητές φαίνεται να διατηρούν την ίδια στρατηγική και αυτό

αποτυπώνεται στο σύνολο εντολών που χρησιμοποιούν όπου αλλάζουν μόνο τη διεύθυνση της βελόνας, ενώ διατηρούν την αριθμητική τιμή της γωνίας. Το Σχήμα 4 παρουσιάζει ενδεικτικά παραδείγματα εντολών που χρησιμοποιήσαν τρεις μαθητές για την αλλαγή της διεύθυνσης της βελόνας προς το σημείο 2 και το Σχήμα 5 αντίστοιχα προς το σημείο 4.



Σχήμα 4. Σύνολα εντολών σωστών προσομοιώσεων για σημείο 2



Σχήμα 5. Σύνολα εντολών σωστών προσομοιώσεων για σημείο 4

Ιδιαίτερα σημαντικά είναι τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των προσομοιώσεων των μαθητών στην περίπτωση της αλλαγής της διεύθυνσης της βελόνας προς το σημείο 3. Στην πραγματικότητα, η αρχική θέση της βελόνας βρίσκεται προσανατολισμένη στον Βορρά και σε εκείνο ακριβώς το σημείο βρίσκεται και το σημείο 3. Συνεπώς, η βελόνα δείχνει εκ των προτέρων το σημείο 3 και για να συνεχίσει να το δείχνει δεν θα πρέπει να αλλάξει καθόλου διεύθυνση.

Προέκυψε ότι οι 32 μαθητές έφτιαξαν σωστή προσομοίωση ώστε να κάνουν τη βελόνα να παραμείνει στην αρχική της θέση. Συγκεκριμένα, από τους 32 αυτούς μαθητές οι 27 χρησιμοποίησαν απλές εντολές με μέγεθος γωνίας 0° είτε χρησιμοποίησαν δομές επανάληψης με μέγεθος γωνίας 0° , 4 μαθητές δεν συμπλήρωσαν καθόλου τον κώδικα έτσι ώστε να δείξουν τη μηδενική αλλαγή διεύθυνσης (σημ. οι μαθητές αυτοί σχεδίασαν 5 σωστές προσομοιώσεις στη συγκεκριμένη δραστηριότητα και υποθέτουμε ότι εν γνώσει τους δεν συμπλήρωσαν κώδικα) και ένας ακόμα μαθητής χρησιμοποίησε την εντολή «στρίψε δεξιά 360° ». Ελλιπή προσομοίωση για το σημείο 3 σχεδίασαν 2 μαθητές οι οποίοι χρησιμοποίησαν εντολές για αλλαγή διεύθυνσης της βελόνας προς τα αριστερά και κατά γωνία 45° και 90° αντίστοιχα. Τέλος, 1 μαθητής δεν απάντησε καθόλου και δεν συμπεριλήφθηκε στους μαθητές που απάντησαν σωστά, καθώς σχεδίασε μόνο 2 σωστές προσομοιώσεις σε αυτή τη δραστηριότητα και υποθέτουμε ότι δεν κατάφερε να ολοκληρώσει την περίπτωση του σημείου 3.

Σημαντικά είναι, επίσης, τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την εύρεση του συνόλου των σωστών προσομοιώσεων που σχεδίασαν οι μαθητές στη δραστηριότητα αυτή. Το μέγιστο που μπορούσαν να επιτύχουν οι μαθητές είναι οι πέντε σωστές προσομοιώσεις αφού υπήρχαν πέντε σημεία στα οποία θα έπρεπε να οδηγήσουν τη βελόνα της πυξίδας. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει το πλήθος των μαθητών και το αντίστοιχο σύνολο σωστών προσομοιώσεων που κατάφεραν να σχεδιάσουν σωστά.

Πίνακας 2. Πλήθος σωστών προσομοιώσεων ανά μαθητή

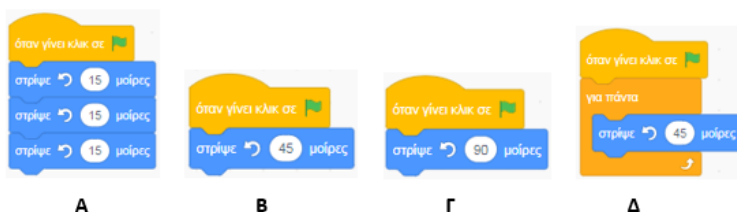
	5 σωστές προσομοιώσεις	4 σωστές προσομοιώσεις	2 σωστές προσομοιώσεις
Πλήθος μαθητών	30	2	3

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η πλειονότητα των μαθητών σχεδίασε σωστά και τις πέντε περιπτώσεις που ζητούσε η δραστηριότητα, ενώ 2 ακόμα μαθητές σχεδίασαν τις τέσσερις περιπτώσεις σωστά. Έτσι, φαίνεται ότι οι μαθητές μπόρεσαν να λάβουν υπόψη τους τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης δραστηριότητας (π.χ. αρχική θέση βελόνας, θέση σημείων διεύθυνση βελόνας, μέγεθος γωνίας κλπ.) και να ανταποκριθούν σε όλες τις περιπτώσεις αλλαγής διεύθυνσης που τους ζητήθηκε.

Ανάλυση απαντήσεων στα Φύλλα Εργασίας

Το Φύλλο Εργασίας που δόθηκε στους μαθητές περιείχε στο πρώτο μέρος του ερωτήσεις όπου οι μαθητές κλήθηκαν να καταγράψουν το μέγεθος της γωνίας που απαιτείται ώστε η βελόνα να εκτραπεί προς τα πέντε προκαθορισμένα σημεία, σύμφωνα με τον τρόπο που εργάστηκαν στο λογισμικό. Αξιοσημείωτο είναι ότι 11 μαθητές δεν ανέγραψαν μόνο την αριθμητική τιμή της γωνίας αλλά δήλωσαν και τον προσανατολισμό της εκτροπής της βελόνας (π.χ. «στρίψε 90° αριστερά κλπ»). Αξίζει να σημειωθεί πως οι 11 αυτοί μαθητές σχεδίασαν και τις 5 προσομοιώσεις σωστά.

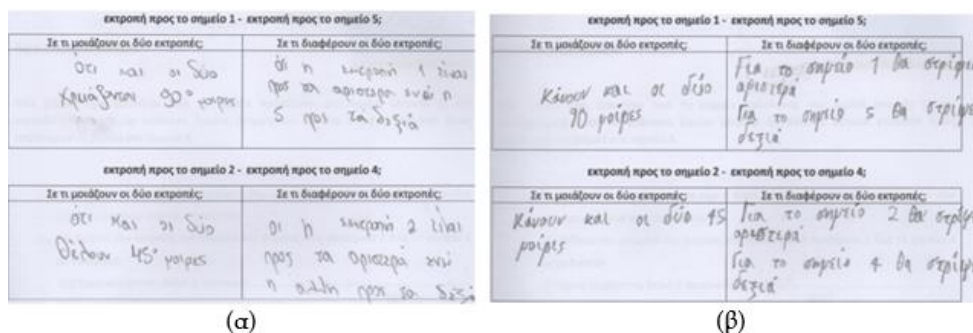
Μετά την ενασχόλησή τους με το λογισμικό, συνέχισαν με τα υπόλοιπα μέρη του Φύλλου Εργασίας τα οποία αφορούσαν σε τέσσερις ερωτήσεις: (α) εύρεση της απόκλισης της βελόνας της πυξίδας που απαιτείται για να οδηγηθεί στο σημείο S (Νότος) της πυξίδας, (β) εύρεση ομοιότητας και διαφοράς της αλλαγής διεύθυνσης για το ζεύγος «σημείο 1 - σημείο 5» και για το ζεύγος «σημείο 2 - σημείο 4», (γ) σχεδιασμός στο χαρτί της γωνίας που αναπαριστά την αλλαγή διεύθυνσης από το σημείο του Βορρά προς το σημείο 5 και (δ) εύρεση σωστών και λανθασμένων συνόλων εντολών μέσα από 4 παραδείγματα για την περίπτωση που ο μαγνήτης θα τοποθετηθεί στο σημείο 2 (βλ. Σχήμα 6).

**Σχήμα 6. Παραδείγματα εντολών που δόθηκαν στους μαθητές**

Όσον αφορά το ερώτημα (α), φάνηκε ότι 28 από τους 35 μαθητές σημείωσαν ότι για να δείξει η βελόνα της πυξίδας το σημείο του Νότου (S) απαιτείται αλλαγή διεύθυνσης με μέγεθος γωνίας 180°. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές αυτοί σχεδίασαν 5 σωστές προσομοιώσεις στη δραστηριότητα αυτή (με εξαίρεση έναν μαθητή που σχεδίασε 4 σωστές προσομοιώσεις). Πιθανώς, λοιπόν, η αυξημένη ικανότητα για σωστό σχεδιασμό ψηφιακής προσομοίωσης με αλλαγή διεύθυνσης να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να αποκτούν γνώση του μεγέθους των γωνιών 0°, 90° και 180°.

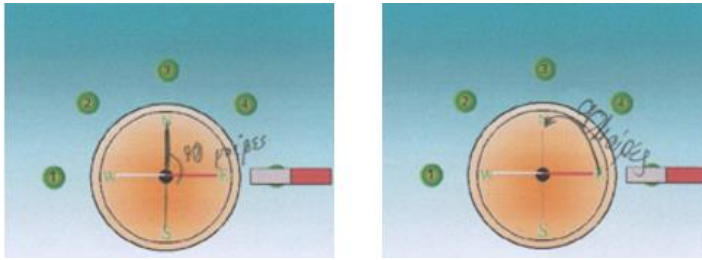
Όσον αφορά το ερώτημα (β), προέκυψε ότι 29 από τους 35 μαθητές απάντησαν σωστά και

για τα δύο ζεύγη αλλαγής διεύθυνσης («σημείο 1-σημείο 5» και «σημείο 2-σημείο 4»), σε καθένα από τα οποία διέγνωσαν την ομοιότητα και τη διαφορά που υπάρχει. Συγκεκριμένα, για το πρώτο ζεύγος ανέφεραν ότι η εκτροπή της βελόνας συμβαίνει με το ίδιο μέγεθος γωνίας (90°), ενώ διαφέρουν στον προσανατολισμό που έχει η αλλαγή της διεύθυνσης της βελόνας (αριστερά για το σημείο 1 και δεξιά για το σημείο 5). Ομοίως για το δεύτερο ζεύγος, ανέφεραν ότι κοινό σημείο αποτελεί το ίδιο μέγεθος γωνίας κατά το οποίο πραγματοποιείται η εκτροπή της βελόνας (45° ή 50°), ενώ διαφέρει ο προσανατολισμός της αλλαγής διεύθυνσης της βελόνας (αριστερά για το σημείο 2 και δεξιά για το σημείο 4). Αξίζει να σημειωθεί ότι οι 28 από αυτούς τους μαθητές σχεδίασαν 5 σωστές ψηφιακές προσομοιώσεις και 1 μαθητής 4 σωστές προσομοιώσεις. Διαφορετικές απαντήσεις έδωσε 1 μαθητής ο οποίος ανέφερε ως ομοιότητα των ζευγών το ίδιο μήκος της βελόνας της πυξίδας, ενώ σαν διαφορά ανέφερε το διαφορετικό μέγεθος γωνίας που απαιτείται και στις δύο περιπτώσεις. Σημειώνεται ότι αυτός ο μαθητής σχεδίασε μόνο 2 σωστές ψηφιακές προσομοιώσεις. Οι υπόλοιποι 5 μαθητές δεν απάντησαν καθόλου στο ερώτημα αυτό. Συνεπώς, φαίνεται ότι οι μαθητές που σχεδίασαν τις περισσότερες ψηφιακές προσομοιώσεις μπορούν να διακρίνουν τις ομοιότητες και τις διαφορές που υπάρχουν από την αλλαγή διεύθυνσης της βελόνας της πυξίδας για την κάθε περίπτωση αλλαγής. Στο Σχήμα 7 παρουσιάζονται ενδεικτικά οι απαντήσεις δύο μαθητών που έδωσαν σωστές απαντήσεις και για τα δύο ζεύγη αλλαγής διεύθυνσης.



Σχήμα 7. Ενδεικτικές σωστές απαντήσεις μαθητών

Όσον αφορά το ερώτημα (γ), σχετικά με τον σχεδιασμό της γωνίας που σχηματίζεται από την αλλαγή διεύθυνσης της βελόνας της πυξίδας από το σημείο του Βορρά προς το σημείο 5, προέκυψαν τα εξής: Οι 27 από τους 35 μαθητές σχεδίασαν σωστά στο χαρτί την ορθή γωνία που σχηματίζεται και ανέγραψαν το μέγεθος της γωνίας αυτής (90°). Από αυτούς, οι 20 μαθητές σχεδίασαν ένα μικρό τόξο που ενώνει τις δύο πλευρές της γωνίας που σχηματίζεται από την αρχική και την τελική θέση της βελόνας, ενώ οι υπόλοιποι 7 μαθητές σχεδίασαν ένα μεγαλύτερο τόξο κοντά στην περιφέρεια της πυξίδας που επίσης ενώνει την αρχική και την τελική θέση της βελόνας. Στο Σχήμα 8 παρουσιάζονται ενδεικτικά τα σχέδια δύο μαθητών που παρουσιάζουν τους δύο αυτούς σωστούς τρόπους παρουσίασης της γωνίας ως «αλλαγή διεύθυνσης» της βελόνας της πυξίδας. Παρόλα αυτά, οι 8 από τους 35 μαθητές δεν σχεδίασαν τίποτα στο χαρτί που είχαν στη διάθεσή τους.



Σχήμα 8. Τρόποι παρουσίασης ορθής γωνίας ως αλλαγή διεύθυνσης

Στον Πίνακα 3 παρουσιάζονται οι απαντήσεις των μαθητών στο ερώτημα (δ) του Φύλλου Εργασίας, το οποίο σχετίζεται με την εύρεση των σωστών συνόλων εντολών μέσα από τέσσερις διαθέσιμες επιλογές ώστε να αλλάξει η διεύθυνση της βελόνας της πυξίδας στην περίπτωση που ο μαγνήτης θα τοποθετηθεί στο σημείο 2 (βλ. Σχήμα 6). Από την ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών προέκυψαν πέντε κατηγορίες απαντήσεων, οι οποίες σχετίζονται με τον βαθμό επιτυχίας στην εύρεση των σωστών συνόλων που δόθηκαν στους μαθητές. Τονίζεται ότι από τα τέσσερα σύνολα εντολών που δόθηκαν (Α, Β, Γ, Δ) που φαίνονται στο Σχήμα 6, σωστά σύνολα εντολών ήταν τα Α και Β, ενώ λανθασμένα ήταν τα σύνολα εντολών Γ και Δ. Οι πέντε κατηγορίες απαντήσεων είναι οι εξής:

- α) **Σωστή:** Οι μαθητές βρήκαν και επέλεξαν και τα δύο σωστά σύνολα εντολών (Α και Β) και ταυτόχρονα δεν επέλεξαν κανένα λανθασμένο σύνολο.
 β) **Σωστή εν μέρει:** Οι μαθητές βρήκαν και επέλεξαν μόνο ένα από τα δύο σωστά σύνολα εντολών και ταυτόχρονα δεν επέλεξαν κανένα λανθασμένο σύνολο.
 γ) **Ανεπαρκής:** Οι μαθητές βρήκαν και επέλεξαν τουλάχιστον ένα από τα δύο σωστά σύνολα εντολών, όμως ταυτόχρονα επέλεξαν και τουλάχιστον ένα λανθασμένο σύνολο εντολών.
 δ) **Λάθος:** Οι μαθητές επέλεξαν μόνο λανθασμένο ή λανθασμένα σύνολα εντολών και κανένα σωστό.
 ε) **Τίποτα:** Οι μαθητές δεν επέλεξαν κανένα σύνολο εντολών (ούτε σωστό ούτε λανθασμένο).

Πίνακας 3. Βαθμός αναγνώρισης εντολών για την αλλαγή διεύθυνσης της πυξίδας

Βαθμός επιτυχίας	Α	Β	Γ	Δ	Α&Β	Β&Γ	Γ&Δ	Σύνολο
Σωστή (επιλογή Α και Β)	-	-	-	-	28	-	-	28
Σωστή εν μέρει (επιλογή Α ή Β)	-	1	-	-	-	-	-	1
Ανεπαρκής (σωστή και λάθος απάντηση)	-	-	-	-	-	1	-	1
Λάθος	-	-	2	1	-	-	1	4
Τίποτα	-	-	-	-	-	-	-	1
Σύνολο	-	1	2	1	28	1	1	35

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η πλειονότητα των μαθητών (28 μαθητές) καταφέρνουν να βρουν και τα δύο σωστά σύνολα εντολών. Επίσης, 1 μαθητής επιλέγει μόνο ένα από τα δύο σωστά σύνολα χωρίς, όμως, να επιλέγει κανένα άλλο λανθασμένο σύνολο

εντολών. Συνεπώς, και οι 29 αυτοί μαθητές φαίνεται να μπορούν να διακρίνουν τόσο τα επιμέρους στοιχεία του κάθε σωστού συνόλου εντολών όσο και τα επιμέρους στοιχεία των λανθασμένων συνόλων, τα οποία και απορρίπτουν. Παρακάτω παρουσιάζεται, ενδεικτικά, η αιτιολόγηση δύο μαθητών από το σύνολο αυτών που επέλεξαν και τα δύο σωστά σύνολα εντολών.

Μαθητής Α: «Οι εντολές Α και Β είναι σωστές διότι για να στρίψει η βελόνα και να πάει στο σημείο 2 πρέπει να στρίψει 45° αριστερά. Η εντολή Α το λέει αναλυτικά διότι $3 \times 15 = 45^\circ$, ενώ η εντολή Β μας το λέει κανονικά. Η εντολή Γ δεν είναι σωστή διότι δεν έχει τις σωστές μοίρες, ενώ η εντολή Δ δεν είναι σωστή διότι έχει τις σωστές μοίρες αλλά εμείς δεν θέλουμε να στρίβει για πάντα».

Μαθητής Β: «Η επιλογή Α και η επιλογή Β έχουν σωστό κώδικα γιατί οδηγούν τη βελόνα 45° αριστερά. Η επιλογή Γ είναι λάθος γιατί πάει τη βελόνα στο σημείο 1. Η επιλογή Δ είναι λάθος γιατί η βελόνα δεν σταματάει να γυρίζει».

Έτσι, φαίνεται ότι οι μαθητές που επέλεξαν μόνο σωστούς κώδικες συνδυάζουν την αριθμητική τιμή της γωνίας με την αριστερόστροφη αλλαγή διεύθυνσης της βελόνας της πυξίδας, με το κέντρο περιστροφής της βελόνας και με τη διάρκεια της αλλαγής διεύθυνσης, έτσι ώστε να ανταποκρίνεται το μοντέλο τους στην πραγματική εμπειρία της εκτροπής της βελόνας. Σημαντικό, επίσης, εύρημα αποτελεί το γεγονός ότι οι μαθητές που επέλεξαν και τους δύο σωστούς κώδικες σχεδίασαν στον υπολογιστή τους 5 σωστές ψηφιακές προσομοιώσεις, με εξαίρεση έναν μαθητή που σχεδίασε 4 σωστές προσομοιώσεις. Συνειπώς, φαίνεται ότι οι μαθητές που σχεδιάζουν σωστές ψηφιακές προσομοιώσεις μπορούν και να αξιολογούν σωστά τα σύνολα εντολών που τους δίνονται και έχουν την ικανότητα να διακρίνουν τα σύνολα εντολών που επιλύουν σωστά τη δραστηριότητα από τα σύνολα εντολών που δεν επιτυγχάνουν τον σκοπό αυτό.

Ακόμα, παρατηρήθηκαν 5 μαθητές οι οποίοι είτε επέλεξαν έναν σωστό κώδικα αλλά και έναν λανθασμένο ταυτόχρονα είτε επέλεξαν μόνο λανθασμένους κώδικες. Τέλος, 1 μαθητής δεν επέλεξε κανένα σύνολο εντολών.

Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η πλειονότητα των μαθητών που συμμετείχαν στην έρευνα είναι ικανή: (α) να δημιουργεί ψηφιακή προσομοίωση της αλλαγής διεύθυνσης της βελόνας μια πυξίδας που εκτρέπεται όταν τοποθετηθεί σε συγκεκριμένα σημεία της ένας μαγνήτης, (β) να αναγνωρίζει τουλάχιστον ένα από τα δύο διαφορετικά σύνολα εντολών που τους δίνονται στο Φύλλο Εργασίας και τα οποία προσομοιώνουν σωστά την κίνηση αυτή και να απορρίπτει ταυτόχρονα τα λανθασμένα σύνολα εντολών, (γ) να βρίσκει ομοιότητες και διαφορές σε δύο αντίστροφες περιπτώσεις αλλαγής διεύθυνσης (δηλαδή με ίδιο μέγεθος γωνίας αλλά διαφορετική κατεύθυνση της βελόνας) και (δ) να σχεδιάζει στο χαρτί τη γωνία που προκύπτει από την αρχική θέση και την τελική θέση της αλλαγής διεύθυνσης της βελόνας, δείχνοντας ουσιαστικά μια γωνία που έχει μόνο μία ορατή πλευρά (αυτή της θέσης που βρίσκεται κάθε φορά η βελόνα). Συνεπώς, η έρευνα δείχνει ότι ο σχεδιασμός ψηφιακών προσομοιώσεων με τη χρήση του οπτικού προγραμματισμού μπορεί να έχει μαθησιακά οφέλη για την κατανόηση της έννοιας της γωνίας και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διδασκαλία της έννοιας αυτής. Ταυτόχρονα, ο δυναμικός χειρισμός των δυνατοτήτων του Scratch φαίνεται να βοηθά τους μαθητές, μέσω της άμεσης ανατροφοδότησης που λαμβάνουν από το λογισμικό και μέσω των διαδικασιών δοκιμής των εντολών και ελέγχου της ορθότητας αυτών, να προσεγγίζουν το μέγεθος της γωνίας με δυναμικό τρόπο και να το συσχετίζουν με τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά της προβληματικής κατάστασης που καλούνται να αντιμετωπίσουν. Παρόμοια μαθησιακά οφέλη από τη χρήση του λογισμικού Scratch έχουν προκύψει και από άλλους ερευνητές (Κακαβάς κ.ά., 2019; Ke, 2014), οι οποίοι αναδεικνύουν την προοπτική εμπλοκής της

διδασκαλίας της Γεωμετρίας και της έννοιας της γωνίας με νέες δραστηριότητες που αξιοποιούν τις δυνατότητες του οπτικού προγραμματισμού στον χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας αφορούν μόνο στο δείγμα των μαθητών που συμμετείχαν σε αυτή, καθώς και στα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά των μαθητών αυτών. Μελλοντική έρευνα σκοπεύει να συμπεριλάβει μεγαλύτερο αριθμό μαθητών, περισσότερες πτυχές της έννοιας της γωνίας και να συνδέσει τα ευρήματα που θα προκύψουν από την ενασχόληση των μαθητών με αυτές. Ταυτόχρονα, μπορεί να αναδείξει πιθανές αδυναμίες αλλά και οφέλη από τη χρήση του οπτικού προγραμματισμού στο πλαίσιο της διδασκαλίας της γωνίας.

Αναφορές

- Balomenou, A., Komis, V., & Zacharos, K. (2019). Instrumental genesis of students' comparison strategies in a digital environment of dynamic Geometry. *Educational Journal of the University of Patras UNESCO Chair*, 6(1), 335-343.
- Bartolini Bussi, M. G., & Baccaglini-Frank, A. (2015). Geometry in early years: sowing the seeds towards a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 391-405.
- Clements, D. H., & Burns, B. A. (2000). Students' development of strategies for turn and angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 31-45.
- Browning, C. A., Garza-Kling, G., & Sundling, E. H. (2007). What's your angle on angles? *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 283-287.
- Chang, K. E., Wu, L. J., Lai, S. C., & Sung, Y. T. (2014). Using mobile devices to enhance the interactive learning for spatial geometry. *Interactive Learning Environments*, 23(1), 1-19.
- Close, G. S. (1982). *Children's understanding of angle at the primary/secondary transfer stage*. Polytechnic of the South Bank, London.
- Devichi, C., & Munier, V. (2013). About the concept of angle in elementary school: Misconceptions and teaching sequences. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 1-19.
- Fahlgren, M., & Brunström, M. A. (2014). A model for task design with focus on exploration, explanation, and generalization in a dynamic geometry environment. *Technology, Knowledge and Learning*, 19(3), 1-29.
- Fessakis, G., Gouli, E., & Mavroudi, E. (2013). Computers & Education Problem solving by 5 - 6 years old kindergarten children in a computer programming environment: A case study. *Computers & Education*, 63, 87-97.
- Henderson, D. W., & Taimina, D. (2005). *Experiencing geometry. Euclidean and non-Euclidean with history*. New York: Cornell University.
- Ke, F. (2014). An implementation of design-based learning through creating educational computer games: A case study on mathematics learning during design and computing. *Computers & Education*, 73, pp. 26-39.
- Kieran, C. (1986). LOGO and the notion of angle among fourth and sixth grade children. In L. Burton and C. Hoyles (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 99-104). London.
- Kynigos, C., Psycharis, G., & Latsi, M. (2009). Meanings for angle through geometrical constructions in 3D space. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, C. (Eds), *Proceedings of the 33rd Conference of international group for the psychology of mathematics education*. Vol. 1, pp. 457-464, Thessaloniki, Greece: PME.
- Mitchelmore, M., & White, P. (1998). Development of angle concepts: A framework for research. *Mathematics Education Research Journal*, 10(3), 4-27.
- Morgan, C., & Alshwaikh, J. (2012). Communicating experience of 3D space: mathematical and everyday discourse. *Mathematical Thinking and Learning*, 14(3), 199-225.
- Scally, S. P. (1986). A clinical investigation of the impact of a LOGO learning environment on students' van Hiele levels of geometric understanding. In L. Burton and C. Hoyles (Eds.), *Proceedings of the 10th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 123-128). London.

- Wang, F., & Hannafin, M. J. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *Educational Technology Research and Development*, 53(4), 5-23.
- Zaranis, N. (2014). Geometry Teaching Through ICT in Primary School. In C. Karagiannidis et al. (Eds.), *Research on e-Learning and ICT in Education: Technological, Pedagogical and Instructional Perspectives* (pp. 59-71). New York: Springer Science+ Business Media.
- Κακαβάς, Κ., Ζαχάρος, Κ., Σκοπελίτη, Ε., Κόμης, Β. (2019). Στο Κ. Χρίστου (επιμ.), *Πρακτικά 8ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών* (σελ. 198-206). Εν.Ε.Δι.Μ.

