Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ VAN HIELE ΚΑΙ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

Ζαράνης Νικόλας
Λέκτορας Π.Τ.Π.Ε. Πανεπιστημίου Κρήτης
nzaranis@edc.uoc.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να διερευνήσει το ερώτημα, αν μπορεί να υπάρξει μοντέλο για τη διδασκαλία των συναρτήσεων με τα επίπεδα van Hiele και τη βοήθεια υπολογιστή. Αρχικά, παρουσιάζουμε τα πλεονεκτήματα της χρήσης των υπολογιστών στην εκπαίδευση και εστιάζουμε στη διδασκαλία των Μαθηματικών με τη βοήθεια εκπαιδευτικού λογισμικού, καθώς και στις έρευνες που έχουν πραγματοποιηθεί στην περιοχή αυτή. Στη συνέχεια, περιγράφουμε το νέο μοντέλο van Hiele για τις συναρτήσεις, που κατασκευάστηκε σύμφωνα με το εκτεταμένο μοντέλο του Alan Hoffer. Ακόμα, αναφέρουμε δραστηριότητες που μπορούν να πραγματοποιηθούν για τις συναρτήσεις με την βοήθεια υπολογιστών και τέλος, παρουσιάζουμε τις επεκτάσεις της εργασίας.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *van Hiele, συναρτήσεις, εκπαιδευτικό λογισμικό, διδακτική Μαθηματικών*

Η ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας συνετέλεσε, ώστε οι υπολογιστές να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην εκπαίδευση και κυρίως στα Μαθηματικά. Οι ερευνητές τα τελευταία χρόνια τονίζουν την εκπαιδευτική αξία της διδασκαλίας με τη χρήση υπολογιστών για πολλούς λόγους (Ράπτης Αρ., Ράπτη Αθ., 2003), μερικοί από τους οποίους είναι οι εξής:

- Τα εκπαιδευτικά προγράμματα των υπολογιστών, που βασίζονται στην εικόνα, το χρώμα, τον ήχο και την κίνηση, κεντρίζουν το ενδιαφέρον των μαθητών, με αποτέλεσμα το μάθημα να γίνεται περισσότερο κατανοητό και ευχάριστο δίνοντας ερεθίσματα για μεγαλύτερη εμβάθυνση.
- Ένας ακόμα σημαντικός λόγος, που αποδεικνύει την εκπαιδευτική αξία των υπολογιστών είναι, ότι οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κατακτούν τα γνωστικά αντικείμενα ανάλογα με το νοητικό τους επίπεδο και βάση των ατομικών τους ιδιαιτεροτήτων.
- Τέλος, ο υπολογιστής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εποπτικό μέσο διδασκαλίας, δίνοντας τη δυνατότητα να συνδυαστεί άμεσα η θεωρία με τις εφαρμογές της στην καθημερινή ζωή κατά την πορεία του μαθήματος.

Η πρώτη χρησιμοποίηση των υπολογιστών στην εκπαίδευση έγινε με σκοπό να βοηθήσουν τους μαθητές στις αριθμητικές πράξεις, αλλά κατά την τελευταία δεκαετία χρησιμοποιήθηκαν ως εργαλείο για τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων στα μαθηματικά προβλήματα καθώς και για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών (Heid, M., Sheets, C., Matras, M., & Menasian, J., 1988).

Η ανάγκη χρησιμοποίησης *εκπαιδευτικού λογισμικού* (προγραμμάτων του υπολογιστή που χρησιμοποιούνται για εκπαιδευτικούς σκοπούς), ως εργαλείο για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, υποδεικνύεται από το National Council of Teachers of Mathematics, (NCTM, 1989) των Ηνωμένων Πολιτειών.

> *"Η τεχνολογία στην εκπαιδευτική διαδικασία θα τροποποιήσει τη διδασκαλία και τη μάθηση των Μαθηματικών. Το λογισμικό των υπολογιστών μπορεί να*

χρησιμοποιηθεί αποτελεσματικά για την παρουσίαση του μαθήματος στην τάξη από τον διδάσκοντα και μεμονωμένα από τους μαθητές με πληθώρα παραδειγμάτων, με σκοπό την ανακάλυψη της γνώσης, τη γενίκευση και την εξαγωγή συμπερασμάτων." (σ. 128)

Ακόμα, στην έκδοση του NCTM (2000) «*Αρχές της Διδασκαλίας των Μαθηματικών»* επισημαίνεται, ότι η τεχνολογία αποτελεί βασικό στοιχείο στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Οι υπάρχουσες έρευνες καταδεικνύουν την ανεπάρκεια των κλασικών μεθόδων διδασκαλίας και συγκεκριμένα, τη δυσκολία κατανόησης των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές, τόσο της πρωτοβάθμιας όσο και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο τρίτο συνέδριο για την *"Αποτίμηση της Εθνικής Εκπαιδευτικής Προόδου"* (National Assessment of Educational Progress), στις Ηνωμένες Πολιτείες (1983) αναφέρθηκε ότι μόλις το 52% των δεκαεπτάχρονων μαθητών της Β΄ τάξης του Λυκείου είχαν διδαχθεί το λιγότερο ένα εξάμηνο Γεωμετρία στο σχολείο και λιγότεροι από το 45% μπορούσαν να υπολογίζουν την τρίτη γωνία τριγώνου, όταν είναι γνωστές οι δύο άλλες γωνίες. Στα συμπεράσματα του Second International Mathematics Study (1985), στη συγκεντρωτική αναφορά για τις ΗΠΑ, υπογραμμίζεται η πτωχή γεωμετρική ικανότητα των μαθητών της Γ΄ Λυκείου.

Ο Z. Usiskin (1982) διευθύνοντας την έρευνα του CDASSAG project (Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry) στο Πανεπιστημιο του Illinois, σχετικά με την ικανότητα των μαθητών του Λυκείου για απόδειξη, φανερώνει ότι :

(α) Λιγότεροι από το 30% των μαθητών καταλαβαίνουν και μπορούν να κάνουν μόνοι τους μία απόδειξη.

(β) Περίπου το 50% δεν κατανοεί, γιατί πρέπει να αποδεικνύουμε κάτι που είναι προφανές.

(γ) Περίπου το 80% των μαθητών δεν είναι ικανοί να χρησιμοποιήσουν σωστά τις υποθέσεις και τους ορισμούς στους μαθηματικούς συλλογισμούς.

(δ) Τέλος, περίπου το 60% δεν καταλαβαίνει, πώς μπορούμε να ξεκινήσουμε μια διαδικασία επίλυσης προβλήματος από μια λανθασμένη υπόθεση, με την "εις άτοπον απαγωγή".

Οι Lindquist and Kouba (1989) αναφέρουν, ότι οι μαθητές της δευτέρας τάξης του Λυκείου, που δεν έχουν πάρει το μάθημα της Γεωμετρίας βαθμολογούνται περίπου στο ίδιο επίπεδο με τους μαθητές πρώτης Γυμνασίου, όπως τονίζεται στο National Assessment of Educational Progress (NAEP). Στο Third International Mathematics and Science Study (TIMSS), που έγινε το 1995 υπογραμμίστηκε, ότι οι μαθητές των ΗΠΑ, κατά το τέλος της φοίτησής τους στο Γυμνασίου, κατέχουν λιγότερα γεωμετρικά θεωρήματα σε σχέση με τους μαθητές άλλων χωρών αντίστοιχης τάξης.

Για την αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος, μια από τις προτεινόμενες διδακτικές προσεγγίσεις της Γεωμετρίας είναι το μοντέλο van Hiele (Ντζιαχρήστος Β. Κολέζα Ε. , 1990), που με την βοήθεια υπολογιστών οδηγεί στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών από τους μαθητές, όπως αναφέρεται στη σχετική βιβλιογραφία (Ζαράνης Ν., 1997, Ζαράνης Ν. &. Ντζιαχρήστος Β., 2002).

Το μοντέλο van Hiele έχει χρησιμοποιηθεί και για την εκτίμηση της απόδοσης μαθητών σε θεματικές περιοχές της Γεωμετρίας όπου απαιτείται η γνώση Αλγεβρικών εννοιών. Κατ΄ επέκταση ίσως υπάρχει η δυνατότητα, η θεωρία van Hiele να εφαρμοστεί στη Ανάλυση και ειδικότερα στις συναρτήσεις (Karen C., Fuson and Diane J. Briars, 1990).

ΤΟ ΝΕΟ ΜΟΝΤΕΛΟ VAN HIELE ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Το 1959, ο Pierre van Hiele παρουσίασε το άρθρο *«Η σκέψη του παιδιού και η Γεωμετρία»* (La pensee de l'enfant et la Geometry), που αμέσως προσέλκυσε το ενδιαφέρον Αμερικανών και Ρώσων ερευνητών. Σε αυτό το άρθρο ο van Hiele (1959) περιγράφει τα επίπεδα σαν:

> *"Συγκεκριμένα βήματα και καμπές στη διαδικασία της μάθησης, που απορρέουν από τις χρησιμοποιούμενες μεθόδους διδασκαλίας. Αυτά τα στάδια καθορίζουν τα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης των μαθητών και είναι μέρος της γνώσης και της διαίσθησης τους για το χώρο και τα γεωμετρικά σχήματα. " (σ. 199)*

Το μοντέλο van Hiele μελετήθηκε από πολλούς ερευνητές (Senk, 1989; Fuys, Geddes, & Tischler, 1988; Burger & Shaughnessy, 1986). Οι Usiskin και Senk (1990) δημιούργησαν τη δοκιμασία "*Van Hiele Geometry Test*" για να ελέγξουν το επίπεδο van Hiele των μαθητών, που έγινε δημοφιλές στις Ηνωμένες Πολιτείες και αναφέρουν ότι:

> *"Το test έγινε περισσότερο διάσημο από ότι περιμέναμε ... και χρησιμοποιήθηκε διεθνώς για να προσδιορίσει το επίπεδο van Hiele των μαθητών." (p.242)*

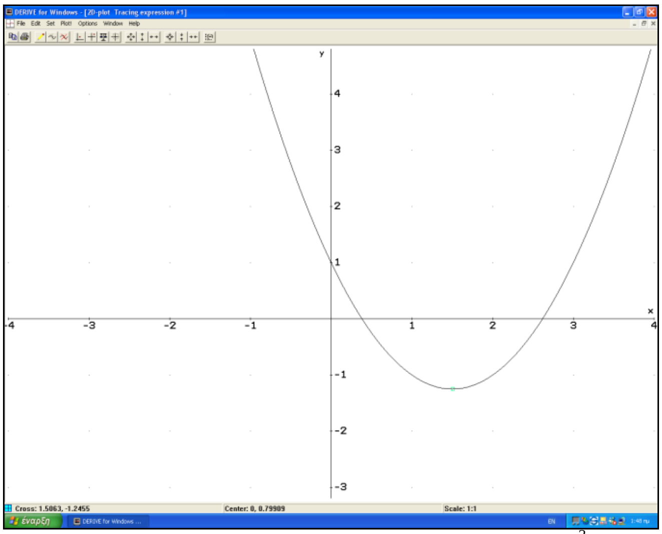
Αν και οι παραπάνω μελέτες βοήθησαν στη εκτίμηση της απόδοσης των μαθητών στη Γεωμετρία, ο van Hiele σημειώνει (Waits, Bert K., Demana, 1992), ότι η διδασκαλία και η εκμάθηση *άλλων αντικειμένων* μπορούν να βελτιωθούν εξίσου αποτελεσματικά με τη χρησιμοποίηση της ομώνυμης θεωρίας του. Η πρόταση αυτή ίσως να μπορεί άμεσα να βρει πεδίο εφαρμογής στις συναρτήσεις, όπως θα εξετάσουμε στη συνέχεια.

Για να κατασκευάσουμε το παραπάνω μοντέλο, χρησιμοποιήσαμε την τροποποιημένη κατά τον Hoffer (1981) θεωρία των επιπέδων van Hiele, η οποία παρουσιάζεται στο βιβλίο των Βαγγ. Ντζιαχρήστο και Δ. Κοντογιάννη, *«Βασικές Έννοιες της Γεωμετρίας»*. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, αναπτύσσονται τα τρία πρώτα επίπεδα van Hiele για τις συναρτήσεις και απευθύνεται στους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου.

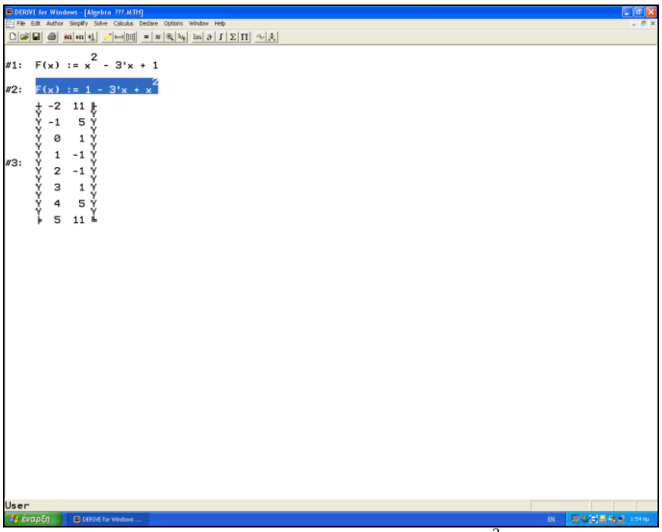
	ΑΝΑΓΝΩΡΙΣΗ	**ΑΝΑΛΥΣΗ**	**ΔΙΑΤΑΞΗ**
ΟΠΤΙΚΕΣ	Αναγνωρίζει ότι η μορφή y=ax+b είναι συνάρτηση.	Εντοπίζει ότι η παραβολή είναι μια απλή μορφή της τετραγωνικής συνάρτησης.	Αναγνωρίζει τις κοινές ιδιότητες των συναρτήσεων $f_1(x)=-\frac{1}{x}$ με x>0 $f_2(y)=-\frac{1}{y}$ με y<0
ΛΕΚΤΙΚΕΣ	Συσχετίζει ότι ο μαθηματικός τύπος $y=ax^2+bx+c$ ονομάζεται τετραγωνική συνάρτηση.	Περιγράφει και προσδιορίζει το μέγιστό ή το ελάχιστο της παραβολής.	Μπορεί να δίνει τον ορισμό της υπερβολής.
ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ	Γράφει με άνεση το μαθηματικό τύπο $f(x)=ax^2+bx+c$ και κάθε άλλη μορφή συνάρτησης όπως $f_1(x)=\frac{1}{x}$ με x>0.	Είναι σε θέση να κατασκευάσει την γραφική παράσταση της παραβολής.	Κατανοεί την μεταβολή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+c$ για τις διάφορες τιμές των a, b κα c.
ΛΟΓΙΚΕΣ	Συνειδητοποιεί τις διαφορές και ομοιότητες που υπάρχουν ανάμεσα στις μαθηματικές έννοιες $f_1(x)=\frac{1}{x}$ με x≠0, $f_2(x)=-\frac{1}{x}$ με x≠0.	Κατανοεί ότι η παραβολή και η υπερβολή αποτελούν κατηγορίες των συναρτήσεων.	Είναι σε θέση να συμπεράνει αν μια ομάδα συναρτήσεων εμπεριέχεται σε μια άλλη ομάδα.
ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ	Αναγνωρίζει το είδος της συνάρτησης που αντιστοιχεί στη μορφή ενός παραδοσιακού γεφυριού της Ηπείρου.	Αναγνωρίζει ότι η βολή μπορεί να εκφραστεί από την συνάρτηση της παραβολής.	Κατανοεί την σχέση της γωνίας βολής με την σταθερά a της παραβολής $y=ax^2$.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ

Με τη βοήθεια εκπαιδευτικού λογισμικού μπορούν να γίνουν δραστηριότητες στον υπολογιστή για τις συναρτήσεις. Χαρακτηριστικά μπορούμε να αναφέρουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x) = x^2-3x+1$, η οποία μπορεί να εμφανιστεί στην οθόνη του υπολογιστή όπως φαίνεται στην *Εικόνα 1* , με τη βοήθεια του προγράμματος DERIVE. Επίσης, ο μαθητής μπορεί να ζητήσει από τον υπολογιστή να του δώσει τον πίνακα τιμών της συνάρτησης για ορισμένη περιοχή (*Εικόνα 2*).



Εικόνα 1. *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης* $F(x) = x^2\text{-}3x+1$.



Εικόνα 2. *Ο πίνακας τιμών της συνάρτησης* $F(x) = x^2\text{-}3x+1$ *με x* $\in$ *[-2,5].*

Πράγματι, από την υπάρχουσα βιβλιογραφία γίνεται φανερό, ότι οι υπολογιστές με τα σύγχρονα προγράμματα εκπαιδευτικού λογισμικού, εισάγουν μία νέα μέθοδο διδασκαλίας των Μαθηματικών (Flewell Gary, 1993) και στηρίζονται στην αλληλεπίδραση μαθητή με υπολογιστή, τη σύνδεση των φυσικών αντικειμένων με τις μαθηματικές έννοιες, την αυτόνομη, ανακαλυπτική, ενεργό και συμμετοχική μάθηση (Ράπτης Αρ., Ράπτη Αθ., 2003). Αυτά τα χαρακτηριστικά βοηθούν το μαθητή να κάνει συσχετισμούς, υποθέσεις και πειραματισμούς, δημιουργώντας ολοκληρωμένες μαθηματικές έννοιες, μέσα από τις γενικεύσεις, που μπορεί να πραγματοποιεί με τον υπολογιστή (Research Council for Diagnostic and Prescriptive Mathematics, 1992).

ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Συνοψίζοντας τις παραπάνω σκέψεις διαπιστώνουμε, ότι *ίσως* το μοντέλο van Hiele μπορεί να αναπτυχθεί στις συναρτήσεις. Όμως, για την επαλήθευση του συλλογισμού αυτού θεωρούμε, ότι η συγκεκριμένη μελέτη θα πρέπει να επεκταθεί και να αποτελέσει την βάση για μια πληρέστερη εμπειρική έρευνα πάνω στο πεδίο της διδασκαλίας των συναρτήσεων, σύμφωνα με τη θεωρία van Hiele και υποβοηθούμενη από την ύπαρξη εκπαιδευτικού λογισμικού στις τάξεις. Υποθέτουμε, ότι οι πληροφορίες που θα προκύψουν από την ανάλυση της γενικευμένης έρευνας με στατιστικές μεθόδους, θα είναι χρήσιμες στο σχεδιασμό διδακτικών μεθοδολογιών, οι οποίες θα βοηθήσουν τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Η παραπάνω πειραματική έρευνα που προτείνουμε, μπορεί να αποτελέσει μια συστηματική ερευνητική προσέγγιση και τα αποτελέσματά της θα συγκριθούν με άλλες ερευνητικές εργασίες (Alper, L., and others, 1995, Kaljumagi, E., A., 1992), για να προκύψουν χρήσιμα συμπεράσματα για μια νεα διδακτική προσέγγιση των συναρτήσεων, με το μοντέλο van Hiele και τη χρήση υπολογιστών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Alper, L., and others (1995), Is This a Mathematics Class?, Mathematics Teacher, 88, 632-38.
2. Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986), Characterizing the van Hiele levels of development in geometry, Journal for Research in Mathematics Education, 17, 31-48.
3. Flewell Gary (1993), Math activities Using Logo-Writer, International Society for Technology in Education".
4. Fuys, D., Gedes, D., & Tischler, R. (1988), The van Hiele model of thinking in Geometry among adolescents), Journal for Research in Mathematics Education Monograph, 3.
5. Heid, M., Sheets, C., Matras, M., & Menasian, J. (1988), Classroom and computer lab interaction in a computer-intensive algebra curriculum, School Science and Mathematics, 92, 243-248.
6. Hoffer A. (1981), Geometry is More than Proof, Mathematics Teacher, 11-18.
7. Kaljumagi, E., A. (1992), A Teacher's Exploration of Personal Computer Animation for the Mathematics Classroom, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, (11), 359-376.
8. Karen C., Fuson and Diane J. Briars (1990), Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First- and Second-Grade Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction, JRME,. 181-206.
9. Lindquist, M. M., & Kouba, V. L. (1989), Geometry, In M. M. Lindquist (Ed.), Results from the Fourth mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 35-43.
10. National Council of Teachers of Mathematics (2000), Principles and Standards for School Mathematics, Reston, VA: Author.
11. National Council of Teachers of Mathematics, (1989), Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA: Author.
12. Research Council for Diagnostic and Prescriptive Mathematics (1992), RCDPM 1992 Conference Book of Abstracts.
13. Second International Mathematics Study (1985) , Summary Report for the United States.
14. Senk, S. (1989), Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs, Journal for Research in Mathemetics Education, 20(3), 308-321.
15. Usiskin Z. (1982), Van Hiele Levels and Achivment in Secondary School Geometry, Columbus, OH, ERIC.
16. Usiskin, Z., & Senk, S. (1990), Evaluating a test of van Hiele levels: A response to Crow-ley and Wilson, Journal for Research in Mathematics Education, 21(3), 242-245

17. Van Hiele P. M. (1959), La Pensee de l'Enfant et la Geometrie, Bulletin de l'Association de Professeus de Mathematioques de l'Enseignement Public, 38(198), 199-205.
18. Waits, Bert K., Demana, F. (1992), A Case against Computer Symbolic Manipulation in School Mathematics Today, Mathematics Teacher, 180-183.
19. Ντζιαχρήστος Β., Κολέζα Ε. (1990), Η Διδασκαλία της Γεωμετρίας στα Σχολεία : Επίπεδα P. M. Van Hiele, Μαθηματική Επιθεώρηση, 37,11-23.
20. Ζαράνης Ν., Ντζιαχρήστος Β. (2002), Κριτική ανάλυση του μοντέλου van Hiele και η διδασκαλία του με τη βοήθεια εκπαιδευτικού λογισμικού σε μαθητές που παρουσιάζουν δυσκολία στην κατανόηση γεωμετρικών εννοιών, Θέματα στην Εκπαίδευση, 3(2-3), 141-153.
21. Ζαράνης Ν. (1997), Ανάπτυξη και υλοποίηση των επιπέδων van Hiele στη Γεωμετρία με τη βοήθεια υπολογιστή, 14ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Ε. Μ. Ε., Μυτιλήνη, 293-304.
22. Ντζιαχρήστος Β., Κοντογιάννης Δ. (2003), Βασικές Έννοιες της Γεωμετρίας, εκδ. ιδίου, Αθήνα.
23. Ράπτης Αρ., Ράπτη Αθ. (2003), Πληροφορική και Εκπαίδευση: Συνολική Προσέγγιση, εκδ. ιδίου, Αθήνα.