Γεωμετρικές κατασκευές με αναλογίες σε περιβάλλοντα σχεδιασμένα για διερευνητική μάθηση στα μαθηματικά με τη χρήση ανάλογων υπολογιστικών εργαλείων

Χρόνης Κυνηγός
Τομέας Παιδαγωγικής, Φ.Π.Ψ.,
Φιλοσοφική Σχολή, Παν/μιο Αθηνών και
Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών, kynigos@cti.gr

Γιώργος Ψυχάρης
Τομέας Παιδαγωγικής, Φ. Π. Ψ.,
Φιλοσοφική Σχολή,
Παν/μιο Αθηνών, gpsichar@cti.gr

Περίληψη
Στο άρθρο αυτό περιγράφονται πτυχές της μαθησιακής διαδικασίας στα μαθηματικά, όπως προέκυψαν από την εργασία ομάδων μαθητών Ε' δημοτικού και Α' γυμνασίου, ενώ εργάζονταν με γεωμετρικά προβλήματα αναλογιών, χρησιμοποιώντας κατάλληλα σχεδιασμένο υπολογιστικό εργαλείο πολλαπλής έκφρασης (αριθμητικής και γραφικής) της μεταβλητότητας των παραμετρικών μεγεθών. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε από τον Τομέα Παιδαγωγικής του Φ.Π.Ψ. Αθήνας στο πλαίσιο προγράμματος σχετικού με την εφαρμογή στην τάξη πειραματικών δραστηριοτήτων για τις έννοιες του κλάσματος και της αναλογίας. Στα ευρήματα καταγράφεται η δυναμική της αξιοποίησης του συγκεκριμένου εργαλείου στη διδασκαλία των μαθηματικών, μέσα από τις στρατηγικές των μαθητών και τις διαγραφόμενες ποιοτικές ενδείξεις του είδους της διερεύνησης που ευνοεί η χρήση του.
Λέξεις κλειδιά: αναλογία, διερευνητικό λογισμικό, εργαλείο μεταβλητότητας, τοπική αφαίρεση

Absract
This paper describes aspects of the learning process in mathematics, as emerged during the implementation of proportional geometric activities in the classroom. Pupils were working in pairs in a computer-based environment using a piece of software specially designed for multiple representation (numeric and graphical) of the variation in parametric procedures. The research was carried out by the University of Athens as part of a programme for the implementation of experimental activities concerning the concepts of fractions and proportion in the classroom. The findings document the potential of the specific tool for the teaching of mathematics by illustrating the pupil's strategies and the nature of investigation encouraged by its use.
Key words: proportion, exploratory software, variation tool, situated abstraction

Θεωρητικό πλαίσιο

Ο χώρος της μαθηματικής παιδείας είναι πλούσιος σε έρευνες σχετικά με την έννοια της αναλογίας. Αυτό δικαιολογείται τόσο από την πρακτική σημασία των αναλογιών στην καθημερινή ζωή και το σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα, όσο και από την κεντρική θέση που κατέχει η αναλογική σκέψη στην ανάπτυξη τυπικών συλλογισμών (Piaget & Inhelder, 1958) και στο νοητικό πεδίο των πολλαπλασιαστικών δομών (Vergnaud, 1988). Παράλληλα με την ανάδειξη της σημασίας της έννοιας, η σχετική διεθνής έρευνα έχει καταγράψει την ύπαρξη σημαντικών προβλημάτων στην κατανόησή της από τους μαθητές (Hart 1981, 1984, Tourniaire and Pulos, 1985, Tourniaire, 1986, Behr et al., 1987), ενώ έχει αμφισβητηθεί η αποτελεσματικότητα των διαφόρων τρόπων διδασκαλίας και έχει επισημανθεί η έλλειψη εποπτικών μέσων στις εκάστοτε διδακτικές της προσεγγίσεις στο σχολείο (Hoyles & Sutherland, 1989, Hoyles et al., 1989).

Η κατανόηση της έννοιας της αναλογίας θεωρείται από τις συνθετότερες των μαθηματικών, καθώς συνδέεται και με μια σειρά άλλων βασικών εννοιών του αναλυτικού προγράμματος. Σύμφωνα με τον Vergnaud (1982), κάθε μαθηματική έννοια θεωρείται το επίκεντρο ενός εννοιολογικού πεδίου (conceptual field) και δεν είναι ποτέ αποστασιοποιημένη από τους τρόπους χρήσης της, τους τρόπους αναπαράστασής της και τις συγγενείς έννοιες που προϋποθέτει ο ορισμός και οι χρήσεις της. Η έννοια της αναλογίας, αναφορικά τόσο με τον ορισμό της όσο και με τις καταστάσεις στις οποίες εμφανίζεται, είναι στενά συνδεδεμένη με τις έννοιες του λόγου και της ομοιότητας. Ο λόγος α/β αποτελεί την αριθμητική έκφραση σύγκρισης ανάμεσα στα μέρη δύο ποσοτήτων (Τριανταφυλλίδης, 1999) και η αναλογία, σχετίζεται με την ισοδυναμία μεταξύ δύο λόγων α/β=γ/δ (Hart, 1984) και την αναγνώρισή τους ως ίσων ή ανηκόντων στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Η κατασκευή δύο όμοιων γεωμετρικών σχημάτων μπορεί να επιτευχθεί: (α) με χρήση της αναλογίας των μηκών των πλευρών του κάθε σχήματος, που πρέπει να είναι ισοδύναμοι και (β) με χρήση των λόγων μεταξύ των αντίστοιχων μηκών των δύο σχημάτων, που πρέπει επίσης να είναι ισοδύναμοι.

Οι πλέον συνηθισμένες στρατηγικές των μαθητών για την επίλυση των προβλημάτων αυτών είναι οι προσθετικές, σύμφωνα με οποίες όμοιο σχήμα προς ένα αρχικό προκύπτει όταν προστεθούν στα μήκη των πλευρών του κατάλληλα μήκη, μέχρι αυτά να εξισωθούν με εκείνα των αντίστοιχων πλευρών του αρχικού σχήματος. Οι σχετικές έρευνες σε μη υπολογιστικά περιβάλλοντα έχουν αναδείξει ότι: (α) Στα προβλήματα μεγέθυνσης ή σμίκρυνσης ενός σχήματος οι μαθητές διακρίνουν δύσκολα την αναλογία (Kuchemann, 1991), ενώ ασχολούμενα με τη μέθοδο που θα ακολουθήσουν και τους αριθμητικούς υπολογισμούς, ξεχνούν ότι τελικά θα πρέπει να προκύψει σχήμα όμοιο με το αρχικό (Hoyles et al., 1989). (β) Οι προσθετικές στρατηγικές επιμένουν για πολλά χρόνια παρότι μερικές φορές είναι ιδιαίτερα κουραστικές (Hart, 1981, 1984, Grugnetti & Torres, 1993), γεγονός που κατά τον Vergnaud (1988) έχει τη ρίζα του στο ότι πολλές σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως: μέτρηση, σύγκριση, μετασχηματισμός, διαφορά, πληθικότητα κ.λπ., σχετίζονται με προσθετικές δομές.

Η φύση της παρούσας έρευνας

Η παρούσα έρευνα εντάσσεται στην κατεύθυνση της αξιοποίησης στη διδασκαλία των μαθηματικών κατάλληλα σχεδιασμένων υπολογιστικών εργαλείων πολλαπλής έκφρασης της μεταβλητότητας παραμετρικών μεγεθών, με κύριους άξονες: (α) την συμβολική έκφραση των μαθηματικών εννοιών και τη δυνατότητα πειραματισμού (β) την πολλαπλή αναπαράσταση μαθηματικών εννοιών και τον άμεσο χειρισμό μαθηματικών αναπαραστάσεων (Kynigos et al., 1997) (γ) τις δυνατότητες σχεδιασμού δραστηριοτήτων μέσω των οποίων ευνοείται η ανάπτυξη εικασιών, υποθέσεων και αφαιρετικής ικανότητας των μαθητών (Hoyles et al., 1989, Hoyles & Noss, 1993, 1996, Sutherland, 1989) (δ) τη σημασία της συνεργατικής μάθησης και της επικοινωνίας στη διδασκαλία (Yackel & Cobb, 1996, Mercer, 1996).

Τα συγκεκριμένα εργαλεία αποτελούν πρόσφορα πεδία μελέτης της έννοιας της αναλογίας καθόσον: (α) Η έννοια αυτή προκύπτει αναπόφευκτα π.χ. κατά τον σχεδιασμό και την αυξομείωση ενός γεωμετρικού σχήματος με χρήση μεταβλητών (Hoyles and Sutherland, 1989, Sutherland, 1989) (β) Η ενιαία μορφή των περιοχών της αριθμητικής, γραφικής και συμβολικής αναπαράστασης των εννοιών μπορεί να βοηθήσει στο ότι τα παιδιά 'ξεχνούν' το σχήμα κατά τη μεγέθυνση ή τη σμίκρυνση (Hart, 1981). (γ) Προηγούμενη ερευνητική εμπειρία έχει αναδείξει ποιοτικές διαφοροποιήσεις στις στρατηγικές και τις ικανότητες που επιδεικνύουν οι μαθητές όταν εργάζονται σε υπολογιστικά περιβάλλοντα (diSessa & Abelson, 1981, Harel & Papert, 1991, Hoyles & Noss, 1996) και ειδικότερα με προβλήματα αναλογιών (Hoyles & Sutherland, 1989, Hoyles & Noss, 1989).

Το πλαίσιο της έρευνας

Η παρούσα έρευνα εκπονήθηκε στα πλαίσια του προγράμματος ΔΕΚΑ[1]. Στο πρόγραμμα συμμετείχαν 4 δημόσια σχολεία (2 δημοτικά και 2 γυμνάσια) που διέθεταν εργαστήριο υπολογιστών. Από κάθε δημοτικό συμμετείχε ένας δάσκαλος και από κάθε γυμνάσιο δύο καθηγητές, ένας μαθηματικός και ένας καθηγητής πληροφορικής. Σχεδιάστηκαν δύο κατηγορίες δραστηριοτήτων: με βιωματικά[2] και υπολογιστικά εργαλεία. Οι δραστηριότητες

[1] «Διερεύνηση με Εργαλεία για τα Κλάσματα και τις Αναλογίες (ΔΕΚΑ)», Κ.Π.Σ., Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης, Σχολεία Εφαρμογής Πειραματικών Προγραμμάτων Εκπαίδευσης (ΣΕΠΠΕ), ΥΠΕΠΘ, Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 1998-99.

[2] Τα βιωματικά εργαλεία είναι ξύλινα ή πλαστικά, δισδιάστατα και τρισδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή σχημάτων και μέσω αυτών στη διερεύνηση μαθηματικών εννοιών

εφαρμόστηκαν σε ένα τμήμα κάθε τάξης (της Ε' Δημοτικού και της Α' Γυμνασίου) παράλληλα με το μάθημα των μαθηματικών για μία ή δύο ώρες κάθε εβδομάδα σε διάστημα 6 μηνών (Ιανουάριος-Ιούνιος '99). Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών έγινε σε δύο επιμορφωτικά σεμινάρια. Το πρώτο πραγματοποιήθηκε λίγο πριν την έναρξη της εφαρμογής και το δεύτερο ένα τρίμηνο μετά. Μεγάλο μέρος των σεμιναρίων αφιερώθηκε στον πειραματισμό των εκπαιδευτικών με αυτά και την εκτέλεση των δραστηριοτήτων της εφαρμογής. Στο παρόν άρθρο αναφερόμαστε στο κομμάτι της έρευνας που σχετίζεται με τα υπολογιστικά εργαλεία.

Το υπολογιστικό περιβάλλον

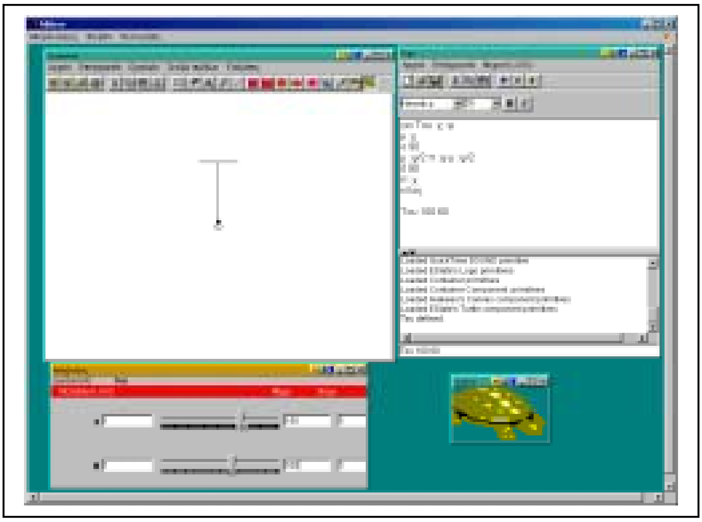
Το υπολογιστικό περιβάλλον που χρησιμοποιήθηκε ονομάζεται "Εργαλείο Μεταβλητότητας" και κύριο χαρακτηριστικό του είναι η δυνατότητα πολλαπλής αναπαράστασης (αριθμητικής και γραφικής) της μεταβλητότητας παραμετρικών μεγεθών και ο δυναμικός χειρισμός των αριθμητικών τιμών τους έχοντας παράλληλα και το αντίστοιχο αποτέλεσμα στη γραφική αναπαράστασή τους (Kynigos et al., 1997). Το περιβάλλον αυτό χαρακτηρίζεται από την συλλειτουργία τριών βασικών υπολογιστικών "χώρων", που ονομάζονται *ψηφίδες* (components) και είναι: **Σφάλμα! Δεν έχει οριστεί σελιδοδείκτης.**(α) *Η ψηφίδα Logo*, που παρέχει δυνατότητες συμβολικής έκφρασης εννοιών με τη μορφή διαδικασιών, με χρήση εντολών μιας Logo-like γλώσσας προγραμματισμού. (β) *Η ψηφίδα Ζωγραφική*, που παρέχει τη γραφική αναπαράσταση των εντολών της γλώσσας. (γ) *Η ψηφίδα Μεταβολέας*, που επιτρέπει τον άμεσο χειρισμό της αριθμητικής μεταβολής των μεταβλητών μεγεθών μιας διαδικασίας.

Οι δραστηριότητες της εφαρμογής

Οι δραστηριότητες με τα υπολογιστικά εργαλεία αφορούσαν στην έννοιας της αναλογίας, όπως αυτή εμφανίζεται στα όμοια σχήματα. Στους μαθητές δόθηκαν συμβολικές περιγραφές αντικειμένων μέσα από προγράμματα που "κατασκευάζουν" τα αντικείμενα. Τα αντικείμενα αυτά ήταν είτε γραφικές αναπαραστάσεις ενός γεωμετρικού σχήματος (π.χ. ορθογωνίου) ή ενός μοντέλου κάποιου αντικειμένου ή συμβόλου (π.χ. γράμματος, σχεδίου σπιτιού). Τα προγράμματα ήταν σχεδιασμένα έτσι ώστε να μεταβάλλονται μόνο τα μεγέθη τα οποία επιδιώκαμε να συγκρίνουν και να μεταβάλλουν οι μαθητές, ώστε να παρατηρήσουν τι συμβαίνει στις περιπτώσεις που υπάρχει ή όχι σχέση αναλογίας.
Για παράδειγμα, στην κατασκευή του κεφαλαίου γράμματος ταυ, το πρόγραμμα που δινόταν στους μαθητές κατασκεύαζε το γράμμα με μεταβλητές το κατακόρυφο (χ) και το οριζόντιο τμήμα (ψ) και αρχικές τιμές χ=100, ψ=60. Για το χειρισμό κάθε μεταβλητής εμφανίζονταν στην οθόνη δύο μπάρες με μεταβαλλόμενα από το χρήστη αριθμητικά όρια τιμών και βήμα μεταβολής. Σε κάθε αλλαγή των αριθμητικών τιμών μιας μεταβλητής στο μεταβολέα, εμφανιζόταν αυτόματα και η αντίστοιχη αλλαγή που επισυμβαίνει στο σχήμα στο χώρο των γραφικών (Σχήμα 1).

όπως πολ/μός, διαίρεση, κλάσματα, πράξεις κλασμάτων, ισοδυναμία και σύγκριση κλασμάτων κ.λπ. Η έναρξη της εφαρμογής έγινε με δραστηριότητες βιωματικών εργαλείων, που σχετίζονταν κυρίως με την έννοια του κλάσματος. Σε όλο το μετέπειτα διάστημα υπήρξε αλληλοδιαπλοκή στην εφαρμογή των δραστηριοτήτων και με τα δύο είδη εργαλείων.

Σχήμα 1: Το υπολογιστικό περιβάλλον με τη διαδικασία κατασκευής του ταυ.



Οι μαθητές κλήθηκαν:
(α) να κάνουν πειράματα σχετικά με τη μορφή του αντικειμένου για διαφορετικές τιμές των μεταβλητών, (β) να προτείνουν κανόνες για το πότε διατηρείται "ίδιο" το σχήμα κάθε αντικειμένου χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερες μεταβλητές, με απώτερο στόχο τη χρήση μιας μεταβλητής για κάθε σχέδιο. Οι αριθμητικές τιμές των όμοιων γραμμάτων που ζητήθηκαν να κατασκευαστούν στη συνέχεια, είχαν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο, ώστε η αφαιρετική μέθοδος να σκοντάφτει στο αδιέξοδο ότι ένα από τα μεταβαλλόμενα μεγέθη κάποια στιγμή γίνεται ίσο με το μηδέν (στο παράδειγμα του ταυ αυτό συμβαίνει για χ=40).

Μεθοδολογία

Στο συγκεκριμένο πειραματικό πρόγραμμα επιδιώχτηκε η καταγραφή και μελέτη μιας σειράς χαρακτηριστικών της εκπαιδευτικής διαδικασίας σε μαθησιακά περιβάλλοντα μαθηματικών με συγκεκριμένα καινοτομικά χαρακτηριστικά (χρήση εργαλείων διερευνητικής μάθησης, ομαδική συνεργατική δουλειά) σε δύο επίπεδα: (α) σε επίπεδο μαθητών, σχετικά με την κατασκευή μαθηματικών νοημάτων και (β) σε επίπεδο τάξης, σχετικά με το ρόλο του εκπαιδευτικού και την ακολουθούμενη διδακτική πρακτική.
Σε αυτό το πλαίσιο ακολουθήθηκαν ποιοτικές μέθοδοι έρευνας που σχετίζονται με την παρατήρηση ανθρώπινων δραστηριοτήτων σε πραγματικό χρόνο (Cohen & Manion, 1994, Yackel & Cobb, 1996), ενώ για την ανάλυση υιοθετήθηκαν στοιχεία από εθνογραφικές μεθόδους και πρακτικές ανάλυσης διαλόγων (Goetz & LeCompte, 1984, Mercer, 1996, Kynigos, 1999) μέσω των οποίων αναδεικνύονται και μελετώνται ποιοτικά πτυχές της μαθησιακής και διδακτικής διαδικασίας.

Συλλογή δεδομένων

Συλλέχτηκαν τέσσερα είδη δεδομένων: (α) Υλικό αξιολόγησης της εφαρμογής, που αποτελείται από μηνιαία και τριμηνιαία δελτία καταγραφής δραστηριοτήτων του Π.Ι. και φύλλα αξιολόγησης που σχεδιάστηκαν από τους ερευνητές και συνόδευαν τα φύλλα εργασίας κάθε δραστηριότητας. (β) Δεδομένα παρατήρησης από την τάξη, όπως βιντεοσκοπήσεις, μαγνητοφωνήσεις και σημειώσεις των ερευνητών. (γ) Ημιδομημένες συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών. (δ) Εργασίες μαθητών.
Ο συνολικός χρόνος παρατήρησης των ερευνητών των υπολογιστικών εργαλείων στα σχολεία ήταν 3 διδακτικές ώρες στο καθένα. Ο εξοπλισμός παρατήρησης ήταν μια βιντεοκάμερα και ένα δημοσιογραφικό κασετόφωνο. Κάθε ώρα παρατήρησης την τάξη βρίσκονταν, εκτός από τον

δάσκαλο, δύο ερευνητές, οι οποίοι παρακολουθούσαν και μπορούσαν να παρέμβουν στις ομάδες. Ο ένας εκ των ερευνητών είχε την ευθύνη χειρισμού της κάμερας και ο άλλος την παρακολούθηση της εργασίας των μαθητών και την επιλεκτική καταγραφή επεισοδίων με το κασετόφωνο. Η κάμερα εστιαζόταν κυρίως σε μία ομάδα παιδιών (ομάδα εστίασης), αλλά κατά διαστήματα μετακινείτο και σε άλλες ομάδες, όταν συνέβαινε κάτι αξιοσημείωτο που η καταγραφή του απαιτούσε και λήψη εικόνας. Όλο το υλικό των δεδομένων παρατήρησης απομαγνητοφωνήθηκε για την ανάλυση.

Αποτελέσματα

1. Προσέγγιση αναλογιών

Ο πειραματισμός των παιδιών στην προσπάθεια κατασκευής όμοιων γεωμετρικών σχημάτων κατευθύνεται συχνά προς την αναζήτηση μιας σχέσης που συνδέει τα μέτρα των δεδομένων πλευρών, ώστε με βάση αυτόν να υπολογιστούν οι ζητούμενες. Οι σχετικές ενδείξεις στην παρούσα έρευνα αφορούν στρατηγικές των μαθητών για την προσέγγιση μιας αναλογίας, συνήθως μετά τη διαπίστωση του αδιεξόδου της προσθετικής/αφαιρετικής μεθόδου. Τα όρια των στρατηγικών αυτών εξαρτώνται, όπως θα δούμε ακολούθως, τόσο από το είδος της ζητούμενης αναλογίας όσο και από τα χρησιμοποιούμενα στη διερεύνηση εργαλεία.

Εύρεση κοινού διαιρέτη των μερών της αναλογίας

Σε κάποιες περιπτώσεις τα παιδιά ανέπτυξαν στρατηγικές διαιρετικού "χειρισμού" μιας αναλογίας όταν η αναλογική σχέση των μερών ήταν εύκολα διακριτή (π.χ. ακέραιος ή δεκαδικός). Στο επόμενο επεισόδιο μια ομάδα παιδιών της Ε' Δημοτικού έχει κατασκευάσει το περίγραμμα ενός σχεδίου σπιτιού με βάση τετράγωνο (α=60) και σκεπή ισοσκελές τρίγωνο (β=40) και όμοιο με αυτό σπίτι με α=120 με διπλασιασμό και των δύο μεγεθών. Όταν ζητείται η κατασκευή όμοιου σπιτιού με α=150, ο μαθητής Μ1 εξηγεί στον ερευνητή (Ε) τη στρατηγική επίλυσης που ακολουθεί:

Μ1: *Το 20 χωράει στο 60 τρεις φορές. Ε, στο 40 χωράει 20 και 20, χωράει δύο φορές. Άμα πάμε στο 150 το 50 χωράει τρεις φορές ... 50 και 50 100, 150. Άρα θα το βάλουμε [ενν. το β] 100.*

Ε: *100 γιατί θα βάλεις;*

Μ1: *Όπως κι αυτό μας έκανε 20 και 20, 40 και 20 60 και το βάλαμε 40, αυτό θα είναι 50 και 50 100 και 50 150 που είπαμε, θα είναι κι αυτό 100.*

(Βιντεοσκόπηση ομάδας, Δημοτικό Σχολείο Σ2, 25/5/99)

Ο Μ1 αναπτύσσει μια μεθοδολογία εύρεσης του ζητούμενου αριθμού με χρήση κοινού διαιρέτη. Βρίσκει αρχικά ένα κοινό διαιρέτη (το 20) των δύο μερών της δοσμένης κατασκευής (του α=60 και του β=40). Στη συνέχεια επιλέγει το διαιρέτη 50 του α=150 της νέας κατασκευής (που χωράει σε αυτόν όσο και το 20 στο 60) και βρίσκει το ζητούμενο αριθμό παίρνοντας αυτό το διαιρέτη δύο φορές (όσες χωράει και το 20 στο 40). Στη συνέχεια ο Ε. διαπίστωσε ότι ο Μ1 μπορούσε να εφαρμόζει αυτό τον τρόπο και σε άλλες κατασκευές όπου οι εμπλεκόμενες αναλογίες έδιναν τέλειες διαιρέσεις.

Προσέγγιση αναλογιών με κλάσματα

Σε άλλες περιπτώσεις, όπου οι εμπλεκόμενες στην κατασκευή αριθμητικές τιμές έδιναν ατελείς διαιρέσεις, οι μαθητές, ιδιαιτέρως του δημοτικού, δυσκολεύτηκαν στους αντίστοιχους χειρισμούς. Στο επόμενο επεισόδιο μια ομάδα μαθητών έχει ήδη κατασκευάσει ταυ διαφορετικών μεγεθών, όμοια με ένα που έχει κατακόρυφο τμήμα α=100 και οριζόντιο β=60 (αναλογία 3:5). Στην παρούσα φάση τους ζητείται να κατασκευάσουν όμοιο ταυ με β=11.

Ε: *Μπορείτε να φτιάξετε ένα ακόμη ίδιο στο σχήμα ταυ και αυτό [ενν. το οριζόντιο] να είναι 11;*

Μ1: *Το 11 στο 60 χωράει 5 φορές αλλά πάει 55, δεν μπορούμε να το αφαιρέσουμε το άλλο / ούτε 1/6 γιατί τότε θα πάει δέκα αυτό. Και δεν γίνεται να πούμε 5 κόμμα 5.*

Μ2: *Ναι, δεν γίνεται.*

Μ1: *Περίμενε. Όμως άμα το πάμε να φύγει το 1/5 πάει 55, όμως αν πάμε το 1/6 πάει 10, ή 10 ή*

12 θα πάει.

(Μαγνητοφώνηση ομάδας, Δημοτικό Σχολείο Σ1, 20/5/99)

Στον παραπάνω διάλογο τα παιδιά προσπαθούν να βρουν το κλασματικό μέρος του 60 που αντιπροσωπεύει το 11, χρησιμοποιώντας γνωστά τους κλάσματα. Προσεγγίζουν το 11 ως ένα μέρος ανάμεσα στο 1/5 και το 1/6 και δεν συνεχίζουν με άλλα κλάσματα, αφού δεν βρίσκουν ακέραιο ή δεκαδικό πηλίκο. Η παραπάνω προσεγγιστική διαδικασία απέκτησε περισσότερο δυναμικό χαρακτήρα και ακρίβεια στις περιπτώσεις που οι μαθητές χρησιμοποίησαν κατά τη διερεύνησή τους το εργαλείο μεταβλητότητας, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Το βήμα προς τον πολλαπλασιασμό

Η κατασκευή γεωμετρικών σχημάτων στο περιβάλλον του εργαλείου μεταβλητότητας περικλείει την δυνατότητα χρήσης της ίδιας μεταβλητής για αλληλεξαρτώμενα μεγέθη. Η εύρεση του είδους της σχέσης αυτής (πολλαπλασιαστική) και του μέτρου της (λόγος) συνθέτουν τις θεμελιώδεις πτυχές του αναλογικού λογισμού. Η μετακίνηση από την προσθετική/αφαιρετική στρατηγική σε πολλαπλασιαστική δεν γίνεται αυτόματα με την διαπίστωση του αδιεξόδου χρήσης της πρώτης. Στο επόμενο επεισόδιο μια ομάδα παιδιών της Ε’ Δημοτικού προσπαθεί να κατασκευάσει ταυ όμοιο με δοσμένο, μηκών α=100, β=60, με νέα τιμή α=40. Ένας μαθητής προτείνει να συνεχίσουν με τη διαίρεση 100 δια 40 ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι πίσω από την κατασκευή του ταυ με α=100 και β=50 το δεύτερο νούμερο προκύπτει από το πρώτο με διαίρεση με 2.

Μ1: *Εδώ στο 100 και στο 50 γίνεται μια διαίρεση μεταξύ τους.*

Ε: *Ποιά διαίρεση;*

Μ1: *100 δια δύο 50 τώρα, 100 δια 40 δεν θα γίνει ... δεν θα βγει στρογγυλός αριθμός.*

Ε: *Τι θα βγει;*

Μ1: *[Κάνει τη διαίρεση] 2 κόμμα 5.*

Ε: *Ωραία, η άλλη πλευρά λοιπόν πόσο θα είναι;*

Μ1: *Μπορούμε να κάνουμε μια αφαίρεση, 60 πλην 2 κόμμα 5.*

Ε: *Θα βγει 57 κόμμα 5.*

(Μαγνητοφώνηση ομάδας, Δημοτικό Σχολείο Σ1, 11/5/99)

Είναι αξιοσημείωτο ότι ενώ ο Μ1 βρίσκεται κοντά στην πολλαπλασιαστική στρατηγική και κάνει σωστά τη συσχέτιση των ζευγών των αριθμητικών τιμών για την εύρεση της αναλογίας, χρησιμοποιεί το αποτέλεσμα της διαίρεσης αφαιρετικά, παρόλο που αυτό οδηγεί σε ένα ταυ με σχεδόν ίσες πλευρές. Εδώ η αφαιρετική διαδικασία προς την ισοδυναμία των λόγων των δύο ζευγών όμοιων σχημάτων δεν έχει ολοκληρωθεί.

Γενικά, το περιβάλλον του εργαλείου μεταβλητότητας αποδείχτηκε πρόσφορο στην διαδικασία μετάβασης από τη συσχέτιση ανάμεσα σε μεμονωμένες τιμές δύο μεγεθών στην γενίκευσή της και από κει στην διαδικασία κατασκευής όμοιων σχημάτων. Στο σχολείο Σ4, μια ομάδα παιδιών καλείται από τον καθηγητή (Κ) να κατασκευάσει νι με εσωτερικές γωνίες 45° και κατακόρυφες πλευρές 50.

Κ: *Εδώ θέλουμε να κάνουμε ένα νι με αυτό 50 [ενν. το κάθετο]. Είναι ένα πρόβλημα να σκεφτείτε πόσο πρέπει να είναι τούτο [ενν. το πλάγιο]. Λιγότερο, περισσότερο ...*

Μ1: *Ε, 50 δεν θα ‘ναι;*

Μ2: *Όχι, περισσότερο.*

Κ: *[συνεχίζοντας] και πόσο. Περισσότερο γιατί;*

Μ2: *Γιατί είναι πλάγιο.*

Κ: *Η πλάγια σε σχέση με την κάθετη θα είναι μεγαλύτερη έτσι;*

Μ1: *Κατά πόσο;*

Κ: *Το κατά πόσο θα πρέπει να το βρείτε εσείς. Κάντε δοκιμές να βρείτε κατά πόσο.*

(Βιντεοσκόπηση τάξης, Σχολείο Σ4 (Γυμνάσιο), 12/5/99)

Το ζητούμενο μήκος της διαγωνίου στη συγκεκριμένη κατασκευή βρέθηκε, με δοκιμές μεμονωμένων τιμών, κοντά στο 70, "περίπου μιάμιση φορά" το μήκος των κατακόρυφων, γεγονός που αποτελεί το πρώτο βήμα στον εστιασμό της διερεύνησης στη σύγκριση των δύο μεγεθών. Στο επόμενο απόσπασμα ένας μαθητής και ο Κ συζητούν για το είδος των μεταβλητών που θα χρησιμοποιήσουν για τη γραφή μιας γενικής διαδικασίας κατασκευής των νι των 45°.

Κ: *Η μία μεταβλητή είναι η κάππα και η άλλη τι μας χρειάζεται;*

Μ1: *Για το πλάγιο.*

Κ: *Να δούμε το πλάγιο πόσο μπορεί να είναι. Το άλλο από μόνο του ή πόσες φορές το πρώτο μπορεί να είναι;*

Μ1: *Πόσες φορές το πρώτο.*

(Βιντεοσκόπηση τάξης, Σχολείο Σ4 (Γυμνάσιο), 12/5/99)

Με αυτό τον τρόπο ο Μ1 προτείνει την εισαγωγή μεταβλητής για το 'πόσες φορές το πρώτο μέγεθος' δίνει το πλάγιο. Μέσω αυτής της συσχέτισης, που υποστηρίχτηκε από την δυνατότητα παρατήρησης της αλλαγής των δύο μεγεθών με το μεταβολέα, οδηγείται στον πολλαπλασιασμό και γράφει τη διαδικασία:

για νι :k :λ
μπροστά :k δεξιά 135 μπροστά :λ:k αριστερά 135 μπροστά :k*
τέλος

Ο πειραματισμός για k=50 ξεκίνησε με λ=1,5, τιμή που είχε βρεθεί προσεγγιστικά από τις μεμομωμένες δοκιμές. Όταν τα παιδιά διαπίστωσαν ότι η τιμή αυτή δεν οδηγεί σε "πολύ καλό" νι, αναζήτησαν με το μεταβολέα καλύτερη προσέγγιση του λάμδα. Τα στάδια αυτής της διαδικασίας περιγράφονται στη συνέχεια.

Προσέγγιση αναλογιών με το εργαλείο μεταβλητότητας

Στο σχολείο Σ4 η προηγούμενη ομάδα παιδιών επιχειρεί να βρει με μεγαλύτερη ακρίβεια τη σχέση του κατακόρυφου και του πλάγιου τμήματος στο νι των 45°. Ο πειραματισμός ξεκινάει για k=50 και λ=1,5, τιμή που είχε βρεθεί προσεγγιστικά από προηγούμενες δοκιμές μεμονομένων τιμών. Η τιμή αυτή διαπιστώνουν ότι δεν οδηγεί σε σωστό νι, καθώς η κάτω δεξιά συμβολή πλάγιας και κατακόρυφης στο νι κατεβαίνει χαμηλότερα από την ευθεία που ορίζουν οι δύο κατακόρυφες πλευρές. Αφού σχεδιάζουν μια οριζόντια γραμμή στη βάση του νι για τον έλεγχο της ορθότητα της κατασκευής, αρχίζουν τον πειραματισμό, μετακινώντας το μεταβολέα σε διαφορετικές τιμές, μέχρι να βελτιωθεί η πρώτη προσέγγιση-εικασία λ=1,5.

Μ1:	*Πάνω από 1 κόμμα 3.*	*Μετακινούν το*
Κ2:	*Και κάτω από 1 κόμμα 5 δεν θέλουμε;*	*μεταβολέα.*
Μ1:	*Ναι.*	
Κ:	*Και πώς όμως να μεταβάλλεται για να πάει από το 1 κόμμα 3 μέχρι το 1 κόμμα 5 σιγά σιγά. Πόσο πρέπει να είναι το κάθε βηματάκι;*	
Μ2:	*Μηδέν κόμμα μηδέν ένα.*	*Αλλάζουν το*
Κ:	*Ακριβώς. Εδώ είναι στο 1 κόμμα 3. Πάμε 1 κόμμα 31, 36.*	*βήμα σε 0,01.*
Μ1:	*Λίγο ακόμα. 40, 41. Αυτό είναι καλό.*	
Κ::	*Το 41 λέτε ή το 42; [Άλλοι απαντούν 41 και άλλοι 42].*	
Μ1:	*Ένα 41 με ένα 42.*	
Κ:	*Πώς μπορούμε με το μεταβολέα να συνεχίσουμε;*	
Μ2:	*Ένα σαρανταενάμιση.*	
Μ1:	*Να βάλουμε μηδέν κόμμα μηδέν μηδέν ένα.*	*Βάζουν μικρότερο βήμα.*

(Μαγνητοφώνηση ομάδας, Σχολείο Σ4 (Γυμνάσιο), 18/5/99)

Όπως φαίνεται από το παραπάνω απόσπασμα, με κατάλληλες μετακινήσεις του μεταβολέα του λ βρίσκουν κάθε φορά τα όρια της καλύτερης προσέγγισης της τιμής του λ. Με αλλαγή βήματος μεταβολής από 0,1 σε 0,01 βρίσκουν διαδοχικά ότι η καλύτερη προσέγγιση βρίσκεται μεταξύ των 1,41 και 1,42. Αλλά αυτά τα όρια δεν κρίνονται οριστικά. Ο Μ1 προτείνει να συνεχίσουν με προσέγγιση χιλιοστού και είναι ο ίδιος που στο διάλογο αναφέρει ότι η ζητούμενη τιμή είναι 'Ένα 41 με ένα 42'. Τα σημεία που είναι ιδιαίτερης σημασίας από ερευνητική και διδακτική σκοπιά είναι τα ακόλουθα: (α) Η τελική προσεγγιστική τιμή προέκυψε μέσα από τη συσχέτιση της κίνησης του μεταβολέα και της δυναμικής εικονικής αναπαράστασης του σχηματιζόμενου νι. Κάτι τέτοιο θα ήταν δύσκολο να πραγματοποιηθεί εκτός του υπολογιστικού περιβάλλοντος. (β)

Μέσα από τον πειραματισμό αναδείχτηκε το ατέρμονο της διαδικασίας προσέγγισης χωρίς να δοθεί μοναδική λύση αλλά η καλύτερη προσεγγιστική. Αυτού του είδους η χρήση του μεταβολέα είναι καταλυτική στη διαδικασία δυναμικού χειρισμού της αλλαγής ενός σχήματος μέσω των αριθμητικών αλλαγών μιας μεταβλητής, καθόσον μέσω αυτής αναπαρίσταται η συμμεταβολή, διαδικασία που ευνοεί την ανάπτυξη τοπικών αφαιρετικών διαδικασιών (Hoyles & Noss, 1996) που περιγράφονται λεπτομερέστερα ακολούθως.

2. Χρήση μεταβλητών και γενίκευση

Το επόμενο βήμα, μετά την εύρεση της πολλαπλασιαστικής σχέσης που συνδέει τα νέα μεγέθη στις μεγεθύνσεις ή τις σμικρύνσεις ενός αρχικού σχήματος, είναι η χρήση μιας μεταβλητής στη διαδικασία από την οποία προκύπτουν όλα τα όμοια σχήματα με την ίδια αναλογική σχέση. Στο επόμενο επεισόδιο μια ομάδα παιδιών έχει ήδη κατασκευάσει το περίγραμμα ενός δεδομένου σχεδίου σπιτιού με βάση ορθογώνιο (α=50 και γ=121) και σκεπή ισοσκελές τρίγωνο (β=70) και όμοιο με αυτό σπίτι με α=100 διπλασιάζοντας και τα δύο μεγέθη. Όταν ζητείται η κατασκευή όμοιου σπιτιού με α=125 οι μαθητές, μετά από πειραματισμό και δοκιμές, ανακαλύπτουν τη διαδικασία κατασκευής με χρήση πολλαπλασιαστικής σχέσης. Κάνουν αρχικά τις διαιρέσεις: 70:50=1,4 και 121:50=2,42.

Μ1: Θα βάλω τώρα [ενν. για τον υπολογισμό της δεύτερης πλευράς] άλφα επί 1 κόμμα 4.
Ε: Και μετά για την άλλη πλευρά;
Μ1: Θα πολλαπλασιάσουμε το άλφα με το 121 δια 50. 2 κόμμα 42.
Ε: Δηλαδή αν τώρα σας δώσει κάποιος ένα άλλο σχέδιο και σας πει βρε παιδιά σ' αυτό το σχέδιο σας δίνω αυτή την πλευρά από την οποία ξεκινάω, πώς θα γίνει να το μεγενθύνω;
Μ1: Θα βάζουμε πάντα το άλφα, μετά άμα θέλουμε για τα υπόλοιπα θα πολλαπλασιάζουμε το άλφα με αυτό που θέλουμε να μεγαλώσει, πόσο θέλουμε να μεγαλώσει.
(Βιντεοσκόπηση ομάδας, Σχολείο Σ3 (Γυμνάσιο), 25/5/99)

Με τη διαπίστωση ότι κάθε νέα τιμή του άλφα πολλαπλασιάζεται με ένα συγκεκριμένο τρόπο για τον υπολογισμό των υπολοίπων, ο Μ1 βρίσκεται κοντά στη γραφή της διαδικασίας με χρήση μιας μεταβλητής. Παρόλ' αυτά τα παιδιά έδειχναν δυσκολία στην χρήση του ίδιου γράμματος σε όλα τα μεγέθη παρόλο που λεκτικά είχαν εντοπίσει αυτή την ανάγκη. Στο επόμενο επεισόδιο, στο σχολείο Σ4, μια άλλη ομάδα παιδιών έχει φτάσει στο ίδιο ακριβώς σημείο με αυτό που περιγράφηκε προηγουμένως. Δύο μαθητές συνεργάζονται για την γραφή της τελικής διαδικασίας κατασκευής όμοιων σπιτιών με μια μεταβλητή. Έχουν ήδη κατασκευάσει σπιτάκια με τιμές α=100, α=125 και α=120 για το άλφα.

Ε: Αν αυτή η πλευρά τώρα είναι άλφα. Για προσπαθείστε. [Ο Ε. απομακρύνεται]
Μ1: [Στον Μ2] Α ναι, αντί να είναι 120 θα είναι άλφα. Γράψε κάτω άλφα δια 50 ίσον //
Μ2: Χι.
Μ1: Οπότε χι επί βήτα επί γάμμα.
Μ2: Χι επί βήτα επί γάμμα.
Μ1: Από αυτό τι προκύπτει;
Ε [Μετά από λίγο πλησιάζει ο ερευνητής] Γράφεις εδώ άλφα δια 50.
Μ1: Ναι, για να βρούμε τη διαφορά.
Ε: Και μετά το βήτα είναι πόσο;
Μ1: Το άλφα δια 50 επί το βήτα.
Ε: Πόσο ήτανε το βήτα πριν;
Μ1: 70.
Ε: Πώς θα το γράψεις σε μια διαδικασία βάζοντας μόνο άλφα;
Μ1: Άλφα πεντηκοστά επί 70.
(Βιντεοσκόπηση ομάδας, Σχολείο Σ4 (Γυμνάσιο), 18/5/99)

Είναι αξιοσημείωτο ότι ενώ οι μαθητές προτείνουν να ονομαστεί με νέο γράμμα χι το πηλίκο άλφα δια 50, στη συνέχεια να δυσκολεύονται να το συνδέσουν με τα μεγέθη βήτα και γάμμα χρησιμοποιώντας μια μεταβλητή. Είναι πιθανό η απορία του Μ1 ("Από αυτό τι προκύπτει;") πριν την παρέμβαση του ερευνητή να σχετίζεται με την αδυναμία του να δει σε συνδυασμό όλα τα γράμματα που αναφέρθηκαν στην γραφή της διαδικασίας, παρόλο που ξέρει ότι θα συνδεθούν πολλαπλασιαστικά. Επίσης δεν είναι σαφές αν εξακολουθεί να βλέπει τα βήτα και γάμμα ως νέες μεταβλητές και μόνο μετά την ερώτηση του ο Ε. για την αρχική τιμή του βήτα (70) συμπεραίνει ότι αυτή θα χρησιμοποιήσει στη γραφή της τελικής διαδικασίας. Μετά την ολοκλήρωση της έκφρασης όλων των μεγεθών με μια μεταβλητή, ο Μ1 μπορεί να περιγράψει συμπερασματικά πώς ακριβώς θα λειτουργήσει στο σχήμα "ο μηχανισμός της ομοιότητας":

Ε: Τώρα δηλαδή με αυτό τον τρόπο όποια τιμή κι αν βάλετε στο άλφα τι παρατηρείτε;

Μ1: Ότι κάθε φορά που θα βάζουμε κάτι στο άλφα θα μεγαλώνει απλά ο όγκος του [ενν. εμβαδόν] αλλά το σχήμα θα μένει πάντα το ίδιο.

(Βιντεοσκόπηση ομάδας, Σχολείο Σ3 (Γυμνάσιο), 25/5/99)

Συμπεράσματα

Στα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν κεντρικό ρόλο κατέχει η αξιοποίηση του εργαλείου μεταβλητότητας, τόσο αναφορικά με τις δυνατότητες διδακτικής προσέγγισης των εμπλεκόμενων μαθηματικών εννοιών, όσο και σχετικά με χαρακτηριστικά της μαθησιακής διαδικασίας από την πλευρά των μαθητών. Ο πειραματισμός με το συγκεκριμένο εργαλείο ήταν καθοριστικός στις επιλογές νέων στρατηγικών από τα παιδιά στη διαδικασία διερεύνησης των δοσμένων προβλημάτων μεγέθυνσης/ σμίκρυνσης.

Πιο συγκεκριμένα, η δυνατότητα του εργαλείου να δίνει άμεση πρόσβαση στο χειρισμό των αριθμητικών τιμών των μεταβαλλόμενων μεγεθών και την ταυτόχρονη γραφική αναπαράστασή τους, οδήγησε στην παρατήρηση της συμμεταβολής των διαφορετικών τμημάτων των κατασκευών, βήμα απαραίτητο για την εστίαση της προσοχής στη σταθερή αναλογική σχέση που διέπει την εκάστοτε αλληλεξάρτησή τους για την μετέπειτα κατασκευή των όμοιων σχημάτων. Για παράδειγμα, η δυνατότητα χρήσης μιας μεταβλητής και αυξομείωσης του παραγόμενου σχήματος, αρχικά για απλές αναλογίες (π.χ. 2:1), έδωσε σε κάποιες ομάδες ένα πεδίο δοκιμής για την αντίστοιχη κιναισθητική παραγωγή όλων των όμοιων γεωμετρικών σχημάτων και για δυσκολότερες αναλογικές σχέσεις.

Σε αυτό το πλαίσιο γίνονται σαφέστερες οι αναφορές ερευνητών σε τοπικές αφαιρετικές διαδικασίες (Hoyles & Noss, 1996) που λαμβάνουν χώρα σε τέτοια περιβάλλοντα, τα οποία μορφοποιούν την εξέλιξη και τον χαρακτήρα τους μέσω των προσφερόμενων δυνατοτήτων στο χρήστη. Τέτοιου τύπου ευρήματα ανοίγουν νέα πεδία έρευνας σχετικά: (α) με τα χαρακτηριστικά της καταγραφόμενης γενίκευσης από τους μαθητές, όπως π.χ. διερεύνησης της 'τοπικότητάς' της (β) με την μετάβαση απ' τις προσθετικές στις πολλαπλασιαστικές στρατηγικές σε προβλήματα αναλογιών, καθώς φαίνεται ότι αυτό δεν μπορεί να μελετάται ανεξάρτητα από τα διαθέσιμα μέσα (γ) με την πολλαπλότητα των πτυχών της μαθηματικής αφαίρεσης (Frorer et al., 1997) και των μέσων με τα οποία ο μαθητής κατασκευάζει και διαχειρίζεται εκφράσεις γενίκευσης (Hoyles & Noss, 1996). Τέτοιου είδους ερωτήματα που ανέκυψαν από τη μελέτη μας είναι σκόπιμο να μελετηθούν μελλοντικά μέσα από μελέτες περίπτωσης για μεγαλύτερο βάθος ανάλυσης, ιδιαίτερα νοητικής, καθόσον μεθοδολογικά η παρούσα έρευνα είχε εθνογραφικό χαρακτήρα και πραγματοποιήθηκε στην τάξη.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1987) Theoretical analysis: Structure and hierarchy, missing value proportion problems, *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. II, 269-274, Montreal.

Cohen, L. & Manion, L. (1994) *Research Methods in Education*, Routledge, London & New York.

diSessa, A. & Abelson, H. (1981) *Turtle Geometry: The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*, Cambridge, MA: MIT press.

Frorer, P., Hazzan, O. & Manes, M. (1997) Revealing the faces of abstraction, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 217-228.

Goetz, J. P. & LeCompte, M. D. (1984) *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*, Academic Press, London.

Grugnetti, L. & Torres, C. M. (1993) The power of additive structure and difficulties in the ratio concept, *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. II, pp. 96-100, Lisboa, Portugal.
Harel, I. & Papert, S. (1991) *Constructionism: Reseasch Reports and Essays*, Ablex Publishing Corporation, Norwood, New Jersey.
Hart, K. M. (Ed.) (1981) *Children's Understanding of Mathematics*, John Murray, London.
Hart, K. M. (1984) *Ratio: Children's strategies and errors*. Windsor: NFER-Nelson.
Hoyles, C. & Noss, R. (1989) The computer as a catalyst in children's proportion strategies, *Journal of Mathematical Behaviour*, 8, pp. 53-75.
Hoyles, C. & Sutherland, R. (1989) *Logo Mathematics in the Classroom*, London, Routledge.
Hoyles, C., Noss, R. & Sutherland, R. (1989) The Ratio and Proportion Microworld, *Final report of the Microworlds project*, Vol. III, Institute of Education, University of London.
Hoyles, C. & Noss, R. (1993), Deconstructing microworlds, in D. L. Ferguson (ed) *Advanced Educational Technologies for Mathematics and Science*, NATO ASI Series, Vol. 107, pp. 415-438, Berlin: Springer-Verlag.
Hoyles, C. & Noss, R. (1996) *Windows on Mathematical Meanings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
Kuchemann, D. (1991) The effect of setting and numerical content on the difficulty of ratio tasks, *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. II, Paris.
Kynigos, C. (1999) (in press) Perspectives in analyzing classroon interaction data on collaborative computer-based environments.
Kynigos, C., Koutlis, M. & Hatzilacos, T. (1997) Mathematics with component-oriented exploratory software, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2, 229-250.
Mercer, N. (1996) The quality of talk in children's collaborative activity in the classroom, *Learning and Instruction*, Vol. 6, No4, pp.359-377.
Piaget, J. & Inhelder, B. (1958) *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence.* Basic Books. New York.
Sutherland, R. (1989) Providing a computer-based framework for algebraic thinking, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 20, No 3, pp. 317-344.
Tourniaire, F. & Pulos, S. (1985) Proportional reasoning: A review of the literature, *Educational Studies in Mathematics*, 16, pp. 181-204.
Tourniaire, F. (1986) Proportions in elementary school, *Educational Studies in Mathematics*, 17, pp. 401-412.
Τριανταφυλλίδης, Τ. (1999) Εποπτικές δραστηριότητες στα μαθηματικά: Η έννοια της ομοιότητας, *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τ. 105, 65-70.
Vergnaud, G. (1982) Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues, *For the Learning of Mathematics*, 3, (2), 31-41.
Vergnaud, G. (1988) Multiplicative structures, In: Hiebert, J. & Behr, M. (eds.) *Number concepts and operations in the Middle Grades*, Hillsdale, NJ Erlbaum: Reston, Counsil of Teachers of Mathematics, pp. 141-161.
Yackel, E. & Cobb, P. (1996) Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 4, 458-477.