«Ο ΠΥΡΓΟΣ ΤΟΥ ΑΝΟΪ» ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟΥ

Κοταρίνου Παναγιώτα
καθηγήτρια Μαθηματικών
pkotarinou@sch.gr.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Ο Πύργος του Ανόι είναι ένα γνωστό πρόβλημα στα Μαθηματικά ,το οποίο βασίζεται στον αντίστοιχο μύθο. Θα προτείνουμε παρακάτω, πώς μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε σε διδασκαλία μας στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο, διαφοροποιώντας κάθε φορά τους στόχους μας. Για τη λύση του προβλήματος χρησιμοποιούμε το αντίστοιχο παιχνίδι που προσφέρεται στο Διαδίκτυο.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: *Επαγωγή, Μαθηματική επαγωγή, Ανάπτυξη εικασίας,pattern.*

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πιστεύοντας ότι το παιχνίδι κινητοποιεί το ενδιαφέρον των μαθητών επιλέξαμε το παρακάτω γνωστό παιχνίδι «Ο Πύργος του Ανόι»,το οποίο προσφέρεται για ποικίλους διδακτικούς στόχους ανάλογα με τις ηλικίες στις οποίες απευθυνόμαστε.

Ένας διδακτικός στόχος μας είναι να αντιληφθούν οι μαθητές ότι « η επαγωγή είναι η μέθοδος–της ανακάλυψης γενικών νόμων,με την παρατήρηση και το συνδυασμό ειδικών περιπτώσεων. Ενώ η μαθηματική επαγωγή είναι μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιείται στα μαθηματικά»(Polya σελ.118)

. Για το Γυμνάσιο σκοπός μας επίσης είναι να μάθουν οι μαθητές να:

Παρατηρούν
Επισημαίνουν ένα νόμο(pattern)
Κάνουν μια λογική εικασία.

Στο Λύκειο θέτουμε έναν επιπλέον στόχο
Να ελέγχουν την εικασία (απόδειξη)

Επειδή, πιστεύουμε ότι η εργασία σε ομάδες ευνοεί την «αναστοχαστική» διαδικασία των μαθητών ,προτείνουμε οι μαθητές να εργαστούν σε ομάδες των δύο ή τριών ατόμων.Κάθε ομάδα θα έχει δικό της υπολογιστή.

Ο ΠΥΡΓΟΣ ΤΟΥ ΑΝΟΪ :ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ.

Τάξη**:** Β Λυκείου
Μάθημα **:** Άλγεβρα
Διδακτική ενότητα:Γεωμετρικές πρόοδοι. Άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου
.

1.Διδακτικός στόχος

Όπως αναφέρθηκαν στην εισαγωγή.

2.Δευτερεύοντες διδακτικοί στόχοι

Να ξαναδούν ένα παράδειγμα αναδρομικής ακολουθίας. Να βρουν το_γενικό τύπο της ακολουθίας μέσω του αναδρομικού της τύπου. Να_εφαρμόσουν τον τύπο του αθροίσματος ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής_προόδου.

3.Διδακτική προσέγγιση
Τα παιδιά θα δουλέψουν σε ομάδες. Κάθε ομάδα θα έχει υπολογιστή με πρόσβαση στο internet.

4.Δομή μαθήματος
-Θα διαβαστεί δυνατά ο Μύθος του Πύργου του Ανόι
-Θα δοθεί το αντίστοιχο κλασικό μαθηματικό πρόβλημα
-Θα εξηγηθεί το παιχνίδι ο Πύργος του Ανόι και θα δοθεί η διεύθυνση στο Διαδίκτυο για να βρουν το παιχνίδι αυτό.
-Στο τέλος θα δοθεί και το φυλλάδιο εργασίας.
Σημείωση
Στο Γυμνάσιο δεν ισχύουν οι δευτερεύοντες διδακτικοί στόχοι.

Ο ΜΥΘΟΣ
(Αναφέρεται και ως Πύργος του Βράχμα)
Σύμφωνα με το μύθο ο Πύργος ήταν σ' έναν Ινδουιστικό ναό στην πόλη Μπεναρές της Ινδίας. Κάποια στιγμή οι ιερείς έπρεπε να μεταφέρουν τον πύργο που αποτελείτο από 64 εύθραυστους χρυσούς δίσκους, από το ένα μέρος του ναού στο άλλο.Οι δίσκοι είχαν όλοι διαφορετικό μέγεθος και ήταν τοποθετημένοι σε μια στήλη, από τον μεγαλύτερο στο κάτω μέρος, στο μικρότερο στην κορυφή. Λόγω της ευθραστότητας των δίσκων δεν επιτρεπόταν να τοποθετηθεί μεγαλύτερος δίσκος πάνω σε μικρότερο και υπήρχε μόνο ένα μόνο ενδιάμεσο μέρος όπου μπορούσαν να τοποθετηθούν προσωρινά οι δίσκοι. Λέγεται ότι προτού οι ιερείς τελειώσουν αυτό το έργο, ο ναός θα έχει γίνει σκόνη και ο κόσμος θα έχει εξαφανιστεί.
Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε με μαθηματικό τρόπο πόσος χρόνος θα χρειαζόταν γι αυτήν την εργασία**;**

ΤΟ ΠΑΙΧΝΙΔΙ
Το παιχνίδι εφεύρε ο Γάλλος μαθηματικός Eduard Lucas to1833, εμπνευσμένος από τον αντίστοιχο μύθο .Για να παίξετε το παιχνίδι μπείτε στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση
http://www.lhs.berkeley.edu/Java/Tower/Tower.html
ΟΔΗΓΙΕΣ
1.Μετακίνησε όλους τους δίσκους από την αριστερή ράβδο στην δεξιά.
2.Μπορείς να μετακινείς μόνο ένα δίσκο τη φορά.
3.Ένας μεγαλύτερος δίσκος δε μπορεί να τοποθετηθεί πάνω από ένα μικρότερο.

ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
Έχουμε ν δίσκους στην αριστερή ράβδο τοποθετημένους από το μεγαλύτερο στο μικρότερο και θέλω να τους μετακινήσω στη δεξιά ράβδο με τις λιγότερες δυνατές κινήσεις. Τη μεσαία ράβδο τη χρησιμοποιώ σαν βοηθητική. Δε μπορώ να τοποθετώ

μεγαλύτερο δίσκο πάνω σε μικρότερο. Η μεταφορά από τη μία ράβδο σε μια άλλη θεωρείται μία κίνηση

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων που θα χρειαστούμε για τη μεταφορά των ν δίσκων

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Μπείτε στο Διαδίκτυο στη διεύθυνση http://www.lhs.berkley.edu/Java /Tower.html

1.Ας ξεκινήσουμε με 1 δίσκο στην αριστερή στήλη.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων για να τον μεταφέρετε στη δεξιά στήλη;

…………………………………………………………………………………………

2.Τώρα τοποθετείστε 2 δίσκους στην αριστερή στήλη.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων για να τους μεταφέρετε στη δεξιά στήλη;

……………………………………………………………………………………………..

3.Δοκιμάστε τώρα με 3 δίσκους.

Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός κινήσεων για να τους μεταφέρετε στη δεξιά στήλη;

………………………………………………………………………………………..

4.Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός δίσκων	Αριθμός κινήσεων
1	Α1=
2	Α2=
3	Α3=
4	Α4=
...	...
ν	Αν=

Με Αν συμβολίζουμε τον ελάχιστο αριθμό κινήσεων για τη μεταφορά των ν δίσκων.

5. Παρατηρώντας τον προηγούμενο πίνακα ,διακρίνετε κάποιο αναδρομικό τύπο; Δηλαδή κάποιον τύπο που να μας υπολογίζει το Αν από το προηγούμενο Αν-1;(το Α2 από το Α1, το Α3 από το Α2 ,το Α4 από το Α3 κ.ο.κ.)

……………………………………………………………………………………………….

6.Μπορείτε τώρα να υπολογίσετε το $Α_5$;

Είναι εύκολο να υπολογίσετε το $Α_{100}$;

………………………………………………………………………………………………..

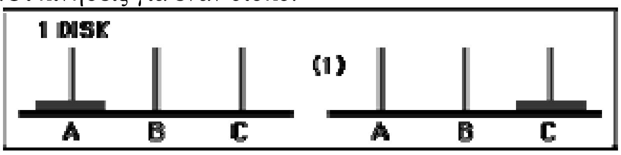
7. Παρατηρώντας πάλι τον ίδιο πίνακα, μπορείτε να διακρίνετε ένα γενικό τύπο; Δηλαδή έναν τύπο που να συσχετίζει τον αριθμό των κινήσεων Αν, με τον αριθμό των δίσκων ν; (το Α1 με το 1.Το Α2 με το 2.Το Α3 με το 3κ.ο.κ.)

……………………………………………………………………………………………….....

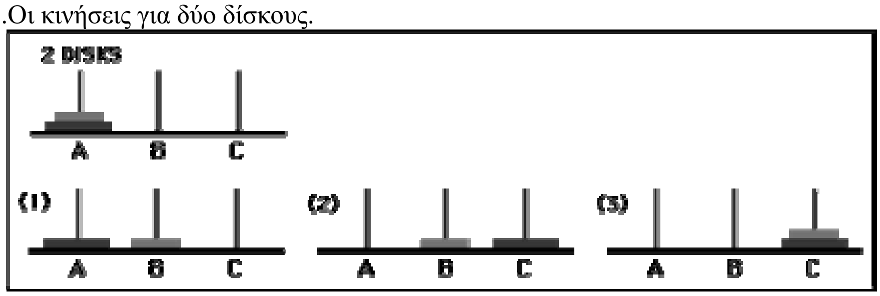
8.Υπολογίστε τώρα το A_{100}
…………………………………………………………………………………………
…..
9.Πώς μπορεί να είστε σίγουροι ότι οι παραπάνω τύποι ισχύουν για κάθε φυσικό αριθμό ν;
……………………………………………………………………………………
10.Μπορείτε ξεκινώντας από τον αναδρομικό τύπο να αποδείξετε το γενικό τύπο;
…………………………………………………………………………………….
…………………………………………………………………………………….
…………………………………………………………………………………….
11.Αν στο μύθο ,κάθε μοναχός χρειάζεται για κάθε κίνηση ένα δευτερόλεπτο, πόσος χρόνος θα χρειαστεί μέχρι να μετα κινηθεί όλος ο πύργος των 64 δίσκων
……………………………………………………………………………………

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

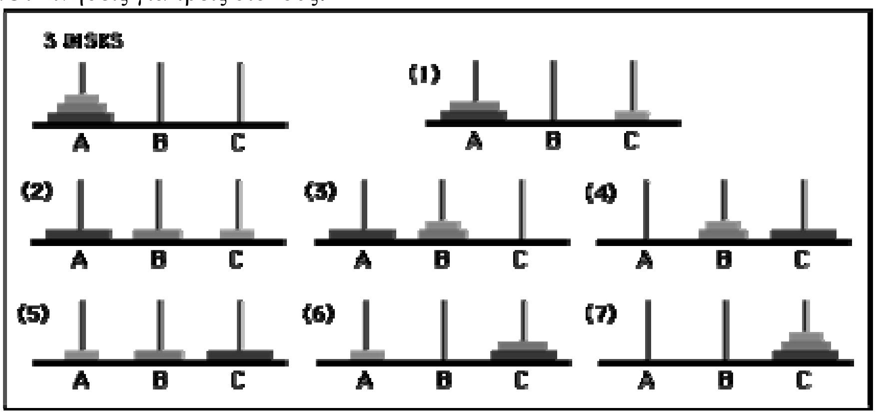
1.Οι κινήσεις για έναν δίσκο.



2.Οι κινήσεις για δύο δίσκους.



3.Οι κινήσεις γιά τρεις δίσκους.



4.Ο Πίνακας

Αριθμός δίσκων	Αριθμός κινήσεων
1	A1=1
2	A2=3
3	A3=7
4	A_4=15
ν	Aν

5.Εύρεση αναδρομικού τύπου.

Παρατηρώντας τον πίνακα βλέπω ότι κάθε αριθμός της δεύτερης στήλης προκύπτει αν στο διπλάσιο του προηγούμενού του προσθέσουμε το 1.Δηλαδή$A_ν=2^{A}{}_{ν-1}+1$

Πράγματι, παρατηρώντας το σχεδιάγραμμα με τους 3 δίσκους,πρώτα μεταφέρω τους 2δίσκους στη στήλη B, μετά με μία κίνηση μετακινώ τον τελευταίο δίσκο στη C και τελευταία τους 2 δίσκους από τη Β στη C.

Όμοια όταν έχω ν δίσκους, κάνω τα εξής βήματα.

1)Πρώτα μεταφέρω ν-1 δίσκους στη μπάρα B. O αριθμός των κινήσεων θα είναι ο ίδιος με αυτόν που χρειάζεται για τη μεταφορά των ν-1 δίσκων στη μπάρα C.Ας ονομάσω αυτόν τον αριθμό κινήσεων $A_{ν-1}$.

2)Μετά, θα μεταφέρω τον τελευταίο και μεγαλύτερο δίσκο από τη μπάρα Α στη μπάρα C[1 κίνηση]

3)Τελικά θα μεταφέρω τους ν-1 δίσκους από τη μπάρα Β στη μπάρα C.Πάλι ο αριθμός των κινήσεων θα είναι $A_{ν-1}$ όσες δηλ. Χρειάζονται για να μεταφέρω τους ν-1 δίσκους από την Α στη C.

Άρα ο συνολικός αριθμός κινήσεων είναι $A_ν=A_{ν-1}+1+A_{ν-1}=2*A_{ν-1}+1$

Αναλυτικά έχω

1. Για 1 δίσκο έχω $A_1=1$
2. Για 2δίσκους έχω $A_2= 2*A_1 + 1 = 2(1) + 1 = 3$
3. Για 3 δίσκους έχω $A_3= 2*A_2 + 1 = 2(3) + 1 = 7$
4. Για 4 δίσκους έχω $A_4= 2*A_3 + 1 = 2(7) + 1 = 15$
5. Για 5 δίσκους έχω: $A_5= 2*A_4 + 1 = 2(15) + 1 = 31$

6.Δυστυχώς για να υπολογίσω το A_{100} θα πρέπει να υπολογίσω το A_{99},το A_{98} κ.ο.κ. Επομένως ο αναδρομικός τύπος δεν μας βοηθάει και πολύ σ' αυτές τις περιπτώσεις.

7. Αριθμός δίσκων Αριθμός κινήσεων

1	$1 =2^1-1$
2	$3 =2^2-1$
3	$7 =2^3-1$
4	$15 =2^4-1$
5	$31=2^5-1$

Και γενικά $A_ν=2^ν-1$

8.$A_{100}=2^{100}-1$

9.Εδώ θα εξηγήσουμε στους μαθητές ότι η μέθοδος της <u>επαγωγής</u> είναι μέθοδος ανακάλυψης νόμων και όχι απόδειξης.

Για να είμαστε σίγουροι χρειαζόμαστε απόδειξη. Μια μέθοδος δε απόδειξης είναι η μαθηματική επαγωγή, που τη χρησιμοποίησα για να δείξω τον αναδρομικό τύπο.

10.$A_v=2*A_{v-1}+1$

$=2*(2*A_{v-2}+1)+1=2^2*A_{v-2}+2^1+1$

$=2^2*(2*A_{v-3}+1)+2^1+1=2^3*A_{v-3}+2^2+2^1+1=...$

$=2^{v-1}*A_1+2^{v-2}+...2^3+2^2+2^1+1$

$=2^{v-1}+2^{v-2}+...+2^3+2^2+2^1+1$ Αυτό είναι άθροισμα ν όρων γεωμετρικής προόδου με$α_1$=1 και λ=2.Χρησιμοποιώντας τον τύπο έχουμε $A_v=2^v-1/2-1=2^v-1$

11.Οι μοναχοί θα χρειαστούν $2^{64}-1$ κινήσεις για να μεταφέρουν τον πύργο.

Εάν για κάθε κίνηση κάθε μοναχός θέλει 1sec.για την ολοκλήρωση του έργου θα χρειαστούν $2^{64}-1$ sec δηλ.590.000.000.000 χρόνια.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:Αν θελήσουμε να κάνουμε τη διδασκαλία στο Γυμνάσιο θα παραλείψουμε από το φύλο εργασίας την ερώτηση 10.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος «Εφαρμογή σύγχρονης τεχνολογίας στη διδασκαλία των Μαθηματικών» που δίδαξε ο Καθηγητής Κ. Χρίστου, τον οποίο και ευχαριστώ για την αμέριστη βοήθειά του.Όπως επίσης ευχαριστώ και τον επιμορφωτή μου ,στα πλαίσια της ενδοσχολικής επιμόρφωσης στους υπολογιστές, Π Ζάφειρα που με την παρότρυνσή του συμμετείχα σ' αυτό το συνέδριο. Το πρόβλημα αυτό μας είχε διεξοδικά αναλυθεί στο μάθημα «ειδικά θέματα διδακτικής» του Κου Στράντζαλου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Lawrence Hall of Science
LHS: Math Games, Tower of Hanoi History & Instructions.htm
Math Forum Ask Dr. Math FAQ: Tower of Hanoi.htm
Pesantes Olga and edited by Suzanne Alejandre . *Tower of HanoiAn age-old exercise in finding a mathematical pattern.*
Polya G. *Πώς να το λύσω.*Αθήνα:Σπηλιώτης
University of California, Berkeley
Κλαουδάτος Ν. (2000),*Σημειώσεις από το μάθημα διδακτικής στο Μεταπτυχιακό διδακτικής του Μαθηματικού τμήματος Αθηνών*
Στράντζαλος Χ.(2000),*Σημειώσεις από το μάθημα Θέματα ειδικής διδακτικής στο Μεταπτυχιακό διδακτικής του Μαθηματικού τμήματος Αθηνών*

ΔΙΕΥΘΥΝΣΕΙΣ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟΥ

1) http://www.mste.uiuc.edu/html.f/resource.xml
Multicultural Math Fair
Tower of Hanoi
2) http://www.lhs.berkeley.edu/java/Tower/Tower.html
3) http://math.forum.org/dr.math/faq/faq.tower.hanoi.html

Οι πίνακες που χρησιμοποιήθηκαν, είναι από την προηγούμενη διεύθυνση του διαδικτύου.