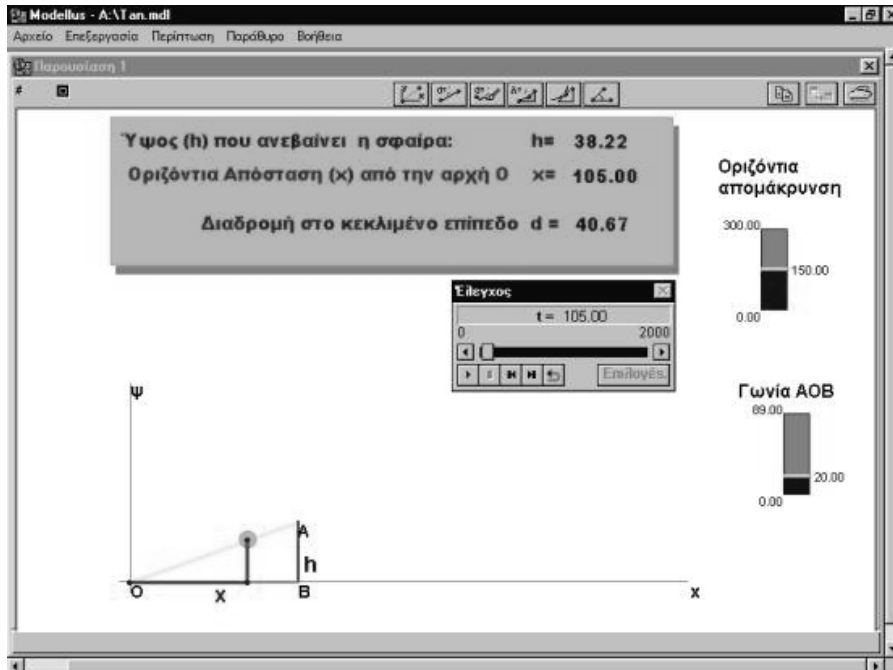


ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΚΛΙΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ιωάννου Στυλιανός
Εκπαιδευτικός Μαθηματικών Β' θμιας Εκπ/σης



Παιδαγωγική αναζήτηση

Η τριγωνομετρία πρωτοξεκίνησε κατά την αρχαιότητα σαν κλάδος που βοήθησε την αστρονομία με θεμελιωτές τους αρχαίους Έλληνες. Η σύνταξη τριγωνομετρικών πινάκων αποτέλεσε πολύτιμο εργαλείο για τις μετρήσεις που απαιτούν «τριγωνομετρικούς αριθμούς». Όμως στα σύγχρονα σχολικά μαθηματικά η τριγωνομετρία από ξεχωριστό κλάδο μελέτης έχει συρρικνωθεί σε ένα κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου αλλά και ως συνιστώσα στη μελέτη άλλων μαθηματικών αντικειμένων. Εντούτοις, οι τριγωνομετρικές γνώσεις είναι απαραίτητες γιατί διαπερνούν τα σχολικά μαθηματικά είτε στη μελέτη συναρτήσεων είτε στη μελέτη φαινομένων ή καταστάσεων με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών αναπαραστάσεων. Στην Β' Γυμνασίου επιχειρείται μια εισαγωγή στη τριγωνομετρία με τον ορισμό της εφαπτομένης. Αυτό γίνεται με την βοήθεια του λόγου δύο μεγεθών και στοιχεία από τη θεωρία των ποσοστών. Η διδασκαλία, με τη βοήθεια του σχολικού βιβλίου, διαπραγματεύεται τη κίνηση ενός αυτοκινήτου σε ένα ανηφορικό δρόμο. Εκείνο που ενδιαφέρει σε κάθε σημείο της διαδρομής είναι ο λόγος του ύψους που ανεβαίνει προς την οριζόντια απομάκρυνση. Το παράδειγμα του βιβλίου αναγκαστικά αποδίδεται με

ένα στατικό σχήμα. Αυτό οφείλεται στο περιορισμό του έντυπου μέσου. Το πρόγραμμα που προτείνεται φιλοδοξεί να προσθέσει κίνηση και αλληλεπίδραση στο στατικό παράδειγμα με τη χρήση των μέσων που διαθέτει ένα αλληλεπιδραστικό περιβάλλον. Χρησιμοποιεί τη δυνατότητα του μέσου για πειραματισμό και ενεργητική μάθηση. Οι λόγοι που σχηματίζονται σε συγκεκριμένα σημεία της διαδρομής αντικαθίστανται με τυχαία σημεία. Στο πλαίσιο αυτό είναι σημαντικό να ασχοληθεί ο μαθητής με καταστάσεις από την καθημερινή ζωή που μπορεί να προσομοιωθούν με τη βοήθεια ενός προγράμματος. Ο μαθητής έχει τη δυνατότητα του άμεσου χειρισμού της προσομοίωσης όσον αφορά το τελικό ύψος που ανέβει το κινητό ή τη τελική οριζόντια απομάκρυνση. Με την ενεργητική συμμετοχή του ο μαθητής μπορεί να εκτιμήσει ποσοτικά και ποιοτικά τις μεταβολές που συντελούνται και τους λόγους που παραμένουν σταθεροί. Το πρόγραμμα υπολογίζει το ύψος που ανεβαίνει, την οριζόντια απόσταση του ίχνους του ύψους από την αρχή. Σκοπός είναι η κατανόηση του ορισμού της εφαπτομένης δεδομένης γωνίας και της κλίσης ευθείας με πειραματισμό. Παρακολουθεί το κινητό και τα αποτελέσματα των μετρήσεων ο μαθητής μπορεί να ασκηθεί στην κατανόηση των σταθερών και μεταβλητών μεγεθών.

Έννοιες	Μεταβλητή
Έννοιες μεγέθη	Εφαπτομένη γωνίας, Κλίση ευθείας
Αναπαραστάσεις	Προσομοίωση κεκλιμένου επιπέδου

Διδακτικοί στόχοι

1. Να μπορούν οι μαθητές να αναγνωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα ενός προβλήματος.
2. Να ασκηθούν στην αναγνώριση των σταθερών και τα μεταβλητών μεγεθών ενός προβλήματος ή μιας διαδικασίας.
3. Να μπορούν να σχηματίζουν το λόγο δύο αριθμών
4. Να αντιληφθούν την εξάρτηση της κλίσης ευθείας από το λόγο y/x (y αντιστοιχεί στο ύψος και x στην οριζόντια απομάκρυνση) όταν η γωνία με το οριζόντιο θετικό ημιάξονα παραμένει σταθερή.
5. Να κατανοήσουν ότι ο σταθερός λόγος y/x (δηλαδή η κλίση της ευθείας) ονομάζεται εφαπτομένη της δεδομένης γωνίας.

Επισημάνσεις

Η προτεινόμενη δραστηριότητα αναφέρεται στο δεύτερο κεφάλαιο «Τριγωνομετρία» του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου. Κύριος στόχος είναι η εμπέδωση της έννοιας «εφαπτομένη γωνίας» όπως την αντιλαμβάνονται και τη χρησιμοποιούν οι μαθητές της αντίστοιχης τάξης. Στο βιβλίο το παράδειγμα χρησιμοποιείται για τη διδασκαλία του ορισμού. Στην προτεινόμενη δραστηριότητα αποτελεί το περιβάλλον για εμπέδωση της αντίστοιχης γνώσης μέσω πειραματισμού. Η έννοια της εφαπτομένης συνδέεται με τη κλίση ευθείας.

Φύλλο εργασίας για τους μαθητές

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ : Η έννοια της εφαπτομένης και η κλίση μιας ευθείας

Εκπαιδευτικό Λογισμικό: **MODELLUS**

Ονοματεπώνυμο:

Τάξη:

Ημερομηνία:

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

Ανοίξτε το αρχείο **tan.mdl**.

Στο πρόγραμμα μπορείτε να παρακολουθήσετε τη κίνηση ενός κινητού, με τη μορφή μιας σφαίρας, κατά μήκος ενός κεκλιμένου επιπέδου. Υπάρχει η δυνατότητα να επιλέξουμε γωνία και οριζόντια απόσταση. Επίσης μπορούμε να σταματήσουμε το κινητό σε όποιο σημείο επιθυμούμε.

Αν πατήστε με το ποντίκι στο κουμπί εκκίνησης  τότε θα τρέξει το πρόγραμμα. Αμέσως όμως θα ενεργοποιηθεί η παύση . Αυτό δίνει τη δυνατότητα αλλαγών. Αν δεν αλλάξετε κάτι, πατήστε ξανά στο  και παρατηρείστε τη διαδρομή του κινητού καθώς και τα αποτελέσματα των τιμών

Εργασία 1

Θα μελετήσετε τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη. Τρέξτε το πρόγραμμα και σημειώστε τι αλλάζει και τι μένει σταθερό στη διάρκεια μιας συγκεκριμένης κίνησης.

Μεγέθη	Σταθερό	Μεταβλητό
Τελική οριζόντια απόσταση		
Τελικό ύψος		
Ύψος που ανεβαίνει		
Οριζόντια απομάκρυνση		
Γωνία κλίσης AOB		
Άλλο;		

Εργασία 2

Ας πειραματιστούμε!! Με την προϋπόθεση ότι η γωνία BOA του κεκλιμένου επιπέδου παραμένει σταθερή και ότι η σφαίρα βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση x και ύψος h να διατυπώσετε μια εικασία για τα παρακάτω:

Για διπλάσια οριζόντια απόσταση ($2x$) πόσο θα είναι το ύψος;

Για τη μισή οριζόντια απόσταση ($x/2$) πόσο θα είναι το ύψος;

Επιβεβαιώστε τις απαντήσεις σας χρησιμοποιώντας το ιστορικό της κίνησης από το παράθυρο του ελέγχου.

Εργασία 3

Ας πειραματιστούμε ξανά !

Ξανατρέξτε το πρόγραμμα από την αρχή πατώντας στην εκκίνηση  στο παράθυρο του ελέγχου. Τότε θα ενεργοποιηθεί η παύση .

Με το ποντίκι επιλέξτε από τον μεταβολέα μήκους, νέα οριζόντια απόσταση x = 200 και όταν είστε έτοιμοι πατήστε τη παύση  για να τρέξει το πρόγραμμα. Να επαναλάβετε το ίδιο για τις τιμές 250, 300, 400 και κάθε φορά να συμπληρώνετε τον παρακάτω πίνακα.

Οριζόντια απόσταση x από την αρχή	Ύψος h που ανεβαίνει	Λόγος του ύψους προς την οριζόντια απόσταση	Πόσο % ανέβηκε η σφαίρα σε σχέση με το οριζόντιο επίπεδο;

Εργασία 4

Με τη βοήθεια του πίνακα 3 σχολιάστε τις παρακάτω ερωτήσεις:

1) Για κάθε διαφορετική τιμή του x , τι παρατηρείτε για τον λόγο του ύψους προς την οριζόντια απόσταση όταν η γωνία παραμένει σταθερή;

2) Πως ονομάζεται ο λόγος του ύψους προς την οριζόντια απόσταση σε σχέση με τη γωνία ΑΟΒ;

3) Πως ονομάζεται ο λόγος του ύψους προς την οριζόντια απόσταση σε σχέση με την ευθεία ΟΑ;

Από τι εξαρτάται το ύψος που ανεβαίνει η σφαίρα κάθε φορά;

Αν ονομάσουμε την γωνία ΑΟΒ= ω , τότε για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΒ να συμπληρώσετε την ισότητα:
εφω = -----

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΣΕ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Παιδαγωγική Αναζήτηση

Η έννοια της μεταβλητής διαπερνάει τα σχολικά μαθηματικά ως μια σημαντική συνιστώσα για την κατανόηση της φορμαλιστικής διάστασή τους. Το ζήτημα για την

κατανόησή της αρχίζει να προκύπτει από την ανάγκη διατύπωσης σε μαθηματική γλώσσα εκφράσεων με μεταβλητά μεγέθη. Όπως καταγράφεται στη βιβλιογραφία αλλά και όπως προκύπτει από την διδακτική πρακτική παρουσιάζονται δυσκολίες, γνωστικής αλλά και επιστημολογικής φύσης, στις μαθηματικές εκφράσεις με τη βοήθεια μεταβλητών. Οι δυσκολίες αυτές εντοπίζονται κυρίως στις μικρές τάξεις του γυμνασίου. Αυτό έχει ως συνέπεια να παρουσιάζονται αργότερα δυσκολίες στη μελέτη των συναρτήσεων αλλά και γενικά κάθε συναρτησιακής σχέσης με μεταβλητά και σταθερά μεγέθη.

Στο πλαίσιο αυτό είναι σημαντικό να ασχοληθεί ο μαθητής με καταστάσεις από την καθημερινή ζωή που μπορεί να περιγραφούν με τη βοήθεια μιας μεταβλητής. Το πρόγραμμα που προτείνεται σε αυτή τη δραστηριότητα προσομοιώνει τη κίνηση ενός ταξί ανάμεσα στους δρόμους μιας πόλης. Τρέχοντας το πρόγραμμα ο μαθητής μπορεί να παρακολουθήσει τη κίνηση σε μια δεδομένη διαδρομή ή να επιλέξει μια δική του και να δει τις ενδείξεις του μετρητή της απόστασης που διανύει το όχημα όπως και το κόστος που πρέπει να πληρώσει κάποιος για αυτή τη διαδρομή. Επομένως



μπορεί να πειραματιστεί με διάφορες διαδρομές και να ανακαλύψει κάθε φορά τα σταθερά και τα μεταβλητά μεγέθη που επηρεάζουν το τελικό κόστος της κάθε μιας από αυτές. Ο μαθητής καλείται να ανακαλύψει το κρυμμένο μαθηματικό μοντέλο και να το περιγράψει με μια μαθηματική έκφραση. Ο μαθητής έχει τη δυνατότητα του άμεσου χειρισμού της προσομοίωσης όσον αφορά το συνολικό μήκος της διαδρομής και τον ρυθμό παρακολούθησης της κίνησης. Με την ενεργητική συμμετοχή του ο μαθητής μπορεί να εκτιμήσει ποσοτικά και ποιοτικά τις μεταβολές που συντελούνται

και να ασκηθεί στον προσδιορισμό των σταθερών και μεταβλητών μεγεθών που επηρεάζουν ένα αποτέλεσμα.

Έννοιες	Μεταβλητή
Έννοιες μεγέθη	Κόστος, Μήκος ανοιχτής πολυγωνικής γραμμής
Αναπαραστάσεις	Διάγραμμα
Τεχνική	Άθροισμα μεγέθους τμημάτων

Διδακτικοί Στόχοι

1. Να μπορούν να αναγνωρίζουν τα δεδομένα και τα ζητούμενα ενός προβλήματος.
2. Να ασκηθούν στην αναγνώριση των σταθερών και τα μεταβλητών μεγεθών ενός προβλήματος.
3. Να ασκηθούν στη σύγκριση δεδομένων από διάφορες πηγές
4. Να παρατηρούν μια προσομοίωση έτσι ώστε να μπορούν να την περιγράφουν με φυσική γλώσσα και να εκφράζουν με μαθηματικό τρόπο με τη βοήθεια μιας μεταβλητής.
5. Να μπορούν να περιγράφουν την έννοια της μεταβλητής και να αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητά της.

Επισημάνσεις

- 1) Η προτεινόμενη δραστηριότητα αναφέρεται στο πρώτο κεφάλαιο «Φυσικοί και Δεκαδικοί αριθμοί» του σχολικού βιβλίου των μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου. Κύριος στόχος είναι η εμπέδωση της έννοιας «μεταβλητή» όπως την αντιλαμβάνονται και τη χρησιμοποιούν οι μαθητές της αντίστοιχης τάξης. Για το λόγο αυτό, η δραστηριότητα δεν περιλαμβάνει πολλαπλές αναπαραστάσεις με πίνακα τιμών και γραφήματα. Η χρήση της μεταβλητής περιορίζεται στη διατύπωση εκφράσεων με μαθηματική γλώσσα. Έτσι ενισχύεται η συνειδητοποίηση της χρησιμότητας να χρησιμοποιούνται γράμματα για την παράσταση αριθμών και ο μετασχηματισμός από τη φυσική σε μαθηματική γλώσσα.
- 2) Η εργασία 6 μπορεί να παραληφθεί αν δεν υπάρχει χρόνος.

Φύλλο εργασίας για τους μαθητές

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ : Η έννοια της μεταβλητής

Εκπαιδευτικό Λογισμικό: MODELUS

Ονοματεπώνυμο:

Τάξη:

Ημερομηνία:

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

Ανοίξτε το αρχείο var1.mdl.

Στην οθόνη εμφανίζεται το διάγραμμα των δρόμων μιας πόλης και η διαδρομή που κάνει ένα εικονικό ταξί. Μπορείτε να δείτε τη διαδρομή που ακολουθεί το ταξί και ταυτόχρονα να δείτε τις ενδείξεις ενός εικονικού μετρητή απόστασης και ενός ταξίμετρου. Υπάρχει η δυνατότητα της επιλογής μιας διαφορετικής διαδρομής ανάμεσα στους δρόμους της πόλης και του καθορισμού της συνολικής διαδρομής. Μπορείτε να σταματήσετε το κινητό σε όποιο σημείο επιθυμείτε ή να επαναλάβετε την κίνηση όσες φορές θέλετε.

Το πρόγραμμα «τρέχει» πατώντας με το ποντίκι στο  στο παράθυρο του ελέγχου. Αμέσως θα ενεργοποιηθεί η παύση . Ξαναπατήστε στη παύση  και παρατηρείστε τη διαδρομή της μπάλας και τις τιμές στους μετρητές.

Εργασία 1

Θα παρακολουθήσετε τις διαδρομές που κάνει ένα ταξί στους δρόμους μιας πόλης και θα μελετήσουμε τα σταθερά και μεταβλητά μεγέθη.

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα εκτιμώντας αν τα διάφορα μεγέθη ή καταστάσεις είναι μεταβλητές ή σταθερές.

Κατάσταση	Σταθερό	Μεταβλητό
Ταχύτητα σε κάθε τμήμα της διαδρομής		
Χρονική διάρκεια σε κάθε τμήμα της διαδρομής		
Συνολική απόσταση σε μια διαδρομή		
Απόσταση που διανύει σε διαφορετικές διαδρομές		
Χρέωση «σημαίας» μιας διαδρομής		
Χρέωση για κάθε m μιας διαδρομής		
Αριθμός επιβατών μιας διαδρομής		
Ελάχιστη χρέωση μιας διαδρομής		
Διάρκεια μιας διαδρομής		
Συνολικό κόστος μιας διαδρομής		
Κόστος σε σχέση με την μεταβολή της απόστασης		
Κόστος για διαφορετικές διαδρομές		

Επιβεβαιώστε για ορισμένα από τα παραπάνω ξανατρέχοντας το πρόγραμμα

Εργασία 2

Παρατηρείστε και σημειώστε, από τι εξαρτάται η χρέωση της συνολικής διαδρομής:

Κατάσταση	ΝΑΙ	ΟΧΙ
Ταχύτητα του ταξί		
Απόσταση που διανύει		
Χρώμα του ταξί		
Χρέωση «σημαίας»		
Χρέωση για κάθε m		
Μέγεθος του ταξί		
Αριθμός επιβατών		
Ωρα της διαδρομής(π.χ. πρωί – απόγευμα)		
Είδος της διαδρομής (π.χ. πολλές στροφές)		

Εργασία 3

Γυρίστε το πρόγραμμα στην αρχή (εκτός και αν είναι). Ξανατρέξτε το πρόγραμμα πατώντας το  στο παράθυρο του ελέγχου. Αμέσως θα ενεργοποιηθεί το πάγωμα . Με το ποντίκι μετακινήστε τα ενδιάμεσα σημεία της διαδρομής AZ και χαράξτε μια νέα διαδρομή ανάμεσα στους δρόμους της πόλης. Προσέξτε το όχημα να πηγαίνει από τους δρόμους και όχι από τα κτίρια. Όταν είστε έτοιμοι πατήστε το  να ξανατρέξει το πρόγραμμα. Μπορείτε να σταματήσετε το κινητό σε όποιο σημείο θέλετε.

Να το επαναλάβετε τρεις φορές με διαφορετική διαδρομή κάθε φορά. Στο τέλος κάθε διαδρομής να συμπληρώνετε την αντίστοιχη γραμμή στον παρακάτω πίνακα 3.

	Σημεία (Δρ)	Απόσταση (m)	Χρέωση ανά m	Συνολικό κόστος
Διαδρομή 1				
Διαδρομή 2				
Διαδρομή 3				

Εργασία 4

Με την βοήθεια του πίνακα 3, περιγράψτε τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται το κόστος μιας διαδρομής και αναγράφεται στο ταξίμετρο.

Εργασία 5

Ας υποθέσουμε ότι το κόστος μιας διαδρομής παριστάνεται με την μεταβλητή y και η αντίστοιχη απόσταση με την μεταβλητή x . Να εκφράσετε με μαθηματική γλώσσα τη σχέση ανάμεσα στο κόστος και την απόσταση συμπληρώνοντας την ισότητα:
 $y =$

Εργασία 6.

Γνωρίζοντας ότι ένα ΕΥΡΩ αντιστοιχεί σε 340,75 δρχ., ξανατρέξτε το πρόγραμμα για μια τυχαία διαδρομή και συμπληρώστε τον πίνακα:

Μήκος διαδρομής	Κόστος ανά μέτρο	Συνολικό κόστος y σε δρχ	Ισότητα που περιγράφει το κόστος y ως συνάρτηση της απόστασης x	Συνολικό κόστος σε ΕΥΡΩ