

# Η Έννοια κι η Γραφική Επίλυση Γραμμικού Συστήματος Δύο Εξισώσεων με Δύο Αγνώστους με τη Βοήθεια του Λογισμικού Geogebra

Κιούφτη Ροϊδούλα<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, rkoufti@hotmail.com

## Περίληψη

Η εργασία αυτή αποτελεί μια πρόταση σεναρίου του μαθήματος των Μαθηματικών της Γ' Γυμνασίου για την έννοια και την επίλυση του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (παράγραφος 3.2 σχολικού βιβλίου) με τη βοήθεια Η/Υ. Αναλύει τις φάσεις και τα στάδια του σεναρίου αυτού μέσω του φύλλου εργασίας, που δόθηκε στους μαθητές, και των δραστηριοτήτων, στο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra, στις οποίες οι μαθητές καλούνται να πάρουν μέρος.

Συγκεκριμένα ξεκινώντας από ένα πρόβλημα θα γίνει υπενθύμιση της έννοιας της γραμμικής εξίσωσης, της γραφικής της παράστασης και των λύσεών της. Όσον αφορά τις λύσεις της γραμμικής εξίσωσης θα θυμηθούμε τόσο το πλήθος των λύσεων όσο και τη μορφή τους. Στη συνέχεια, μέσω πάντα του προβλήματος, θα μεταβούμε στην έννοια του γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και θα διερευνήσουμε το πλήθος των λύσεων αυτού του συστήματος και πως αυτές σχετίζονται με τις ευθείες που έχουν εξισώσεις τις εξισώσεις του συστήματος.

**Λέξεις κλειδιά:** σενάριο, γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος  $2 \times 2$ , λογισμικό Geogebra.

## 1. Εισαγωγή

Το νέο πλαίσιο διδασκαλίας που διαμορφώνουν οι σύγχρονες θεωρίες μάθησης και διδασκαλίας απαιτεί να εγκαταλείψουμε το παραδοσιακό δασκαλοκεντρικό μοντέλο της μετωπικής διδασκαλίας στην τάξη, που επικράτησε από την εποχή του John Amos Comenius και να μεταβούμε σε ένα μαθητοκεντρικό μοντέλο, όπου ο μαθητής θα έχει ενεργό ρόλο και συμμετοχή στην πορεία της διδασκαλίας.

Οι ΤΠΕ μπορούν να συμβάλλουν στη δημιουργία ενός μαθησιακού, αλληλεπιδραστικού περιβάλλοντος που διευκολύνει τη διαπραγμάτευση των πληροφοριών και τη συστηματική προσέγγιση εννοιών, μέσα από διερευνητικές, ομαδοσυνεργατικές διαδικασίες και διαθεματικές προσεγγίσεις (Σταυρίδου 2000). Ειδικότερα οι μέχρι τώρα έρευνες έχουν δείξει ότι οι ΤΠΕ συμβάλλουν σημαντικά στη διδασκαλία και μάθηση των μαθητικών, γιατί οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να πειραματιστούν, να διερευνήσουν, να κάνουν υποθέσεις και να εστιάσουν στις συνδέσεις μεταξύ πολλαπλών αναπαραστάσεων (Ainley & Pratt 2002; Condie &

---

Α. Λαδιάς, Α. Μικρόπουλος, Χ. Παναγιωτακόπουλος, Φ. Παρασκευά, Π. Πιντέλας, Π. Πολίτης, Σ. Ρετάλης, Δ. Σάμψων, Ν. Φαχαντίδης, Α. Χαλκίδης (επιμ.), Πρακτικά Εργασιών 3ου Πανελληνίου Συνεδρίου «Ένταξη των ΤΠΕ στην Εκπαιδευτική Διαδικασία» της Ελληνικής Επιστημονικής Ένωσης ΤΠΕ στην Εκπαίδευση (ΕΤΠΕ), Τμήμα Ψηφιακών Συστημάτων, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Πειραιάς, 10-12 Μαΐου 2013

Munro 2007).

Στα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας όπως το Geogebra οι μαθητές θα χρησιμοποιήσουν συνδυασμό αναπαραστάσεων των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών, δηλαδή θα τις διατυπώσουν υπό τη μορφή εντολών σε συμβολική γλώσσα, θα παρατηρήσουν το γραφικό αποτέλεσμα των εντολών στο μηχάνημα και θα χειριστούν δυναμικά τις γεωμετρικές τους κατασκευές αλλάζοντας με συνεχή τρόπο τις τιμές των μεταβλητών μεγεθών τους (Κυνηγός, Χ., κ.α. (2010). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*. Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, Β' έκδοση Αναθεωρημένη & Εμπλουτισμένη. Πάτρα: ΙΤΥ). Με τη βοήθεια της προτεινόμενης δραστηριότητας θα εμπλακούν σε διαδικασίες εικασίας, κατασκευής υποθέσεων, εξαγωγής συμπερασμάτων και σταδιακής γενίκευσης και διατύπωσης κανόνων για την γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος  $2 \times 2$ .

Επίσης διευρύνεται η φαντασία τους και καλλιεργείται η κοινωνικότητα, η δημιουργικότητα και η κριτική τους σκέψη κατά την μετάβαση από το ειδικό στο γενικό και τη συνεργασία τους σε ομάδες.

## 2. Πλαίσιο Εφαρμογής του Σεναρίου

### 2.1 Ένταξη στο αναλυτικό πρόγραμμα

Το σενάριο αυτό μπορεί να ενταχθεί στο πρόγραμμα της Γ' Γυμνασίου στο κεφάλαιο των συστημάτων και ειδικότερα στην παράγραφο 3.2 (Αργυράκης, Δ., κ.α. (2010). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου*, Αθήνα: ΟΑΕΔ).

Προτείνεται η υλοποίηση του σεναρίου να πραγματοποιηθεί στο εργαστήριο των υπολογιστών και η εκτιμώμενη διάρκεια είναι δύο διδακτικές ώρες.

### 2.2 Προαπαιτούμενες γνώσεις

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:

- Την έννοια της γραμμικής εξίσωσης με δύο αγνώστους και πότε ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών είναι λύση της.
- Πότε μια γραμμική εξίσωση παριστάνει ευθεία και να μπορούν να σχεδιάσουν την ευθεία αυτή.

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν:

- Το περιβάλλον, τις βασικές εντολές και κατασκευές του λογισμικού το Geogebra.

### 2.3 Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία

Για την υλοποίηση του σεναρίου έχει χρησιμοποιηθεί:

- Το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra.
- Το φύλλο εργασίας με τις δραστηριότητες που θα υλοποιήσουν οι μαθητές.
- Το τετράδιο εργασιών για οτιδήποτε θελήσουν οι μαθητές να σημειώσουν.

### 2.4 Κοινωνική ενσχυρήστρωση της τάξης

Ένας από τους στόχους του σεναρίου ήταν η δημιουργία ενός μαθησιακού περιβάλλοντος εμπλουτισμένου με τις νέες τεχνολογίες, προκειμένου να προωθήσει τη μάθηση μέσα από διαδικασίες διερεύνησης, πειραματισμού, δημιουργίας, έκφρασης και επικοινωνίας. Για το σκοπό αυτό η προβλεπόμενη μέθοδος διδακτικής είναι αυτή της συνεργατικής μάθησης με κύριο εργαλείο τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, της οποίας τα χαρακτηριστικά είναι κοινά σε όλα αυτού του είδους τα διερευνητικά σενάρια. Στο πλαίσιο αυτό προτείνεται σαν χώρος διδασκαλίας να χρησιμοποιηθεί το εργαστήριο των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Οι μαθητές χωρισμένοι σε μικρές ομάδες (2-3 μαθητές) δουλεύουν μπροστά στον υπολογιστή, αναλαμβάνοντας διαφορετικούς ρόλους ο καθένας (πληκτρολόγηση-διαχείριση ποντικιού, τήρηση σημειώσεων στο τετράδιο ή το φύλλο εργασίας). Συζητούν μεταξύ τους για το πρόβλημα, κάνουν υποθέσεις, πειραματίζονται με τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία, και επαναδιαπραγματεύονται τους στόχους τους ανάλογα με την πορεία της εργασίας τους.

Ο καθηγητής/η καθηγήτρια σε αυτό το πλαίσιο αναλαμβάνει το ρόλο του συνερευνητή/της συνερευνητριάς και του βοηθού /της βοηθού των προσπαθειών των μαθητών.

### 2.5 Μαθησιακοί στόχοι:

Οι μαθητές πρέπει να μάθουν:

- Τι είναι γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και πότε ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του. (*Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου Βιβλίο Εκπαιδευτικού 2010*).
- Να επιλύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και να κατανοήσουν πότε έχει μια λύση, πότε είναι αδύνατο και πότε αόριστο. (*Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου Βιβλίο Εκπαιδευτικού 2010*).

### 2.6 Παιδαγωγικοί στόχοι:

Η χρήση των συγκεκριμένων λογισμικών και το συνεργατικό μαθησιακό περιβάλλον, που περιγράφεται παραπάνω, παρέχουν τη δυνατότητα στους μαθητές:

- Να οργανώσουν τα δεδομένα τους ώστε να διευκολυνθούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων και στην εύρεση λύσεων (Ιωάννου, Σ. κ.α. (2010). *Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των επιμορφωτών - Ειδικό μέρος Ειδικότητα ΠΕ03*).
- Να μάθουν να συνεργάζονται με τα άλλα μέλη της ομάδας για να συζητήσουν τις παρατηρήσεις τους, να οργανώσουν τα συμπεράσματά τους, να καταχωρίσουν τα δεδομένα τους, να κατασκευάσουν σχέσεις που συνδέουν μεγέθη, να παρουσιάσουν την εργασία τους στις άλλες ομάδες (Ιωάννου, Σ. κ.α. (2010). *Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των επιμορφωτών - Ειδικό μέρος Ειδικότητα ΠΕ03*).

## 3. Υλοποίηση του Σεναρίου

Η εφαρμογή του σεναρίου στην τάξη υλοποιείται μέσα από το φύλλο εργασίας που

δίνεται στους μαθητές και τις δραστηριότητες με τις οποίες θα ασχοληθούν στο περιβάλλον του λογισμικού. Επίσης έχουν επισυναφθεί στιγμιότυπα από τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος με τη βοήθεια του λογισμικού Geogebra.

## ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Τάξη Γ΄

Ημερ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ

ΟΜΑΔΑΣ.....

### Πρόβλημα:

Στο χορό της Γ΄ γυμνασίου οι μαθητές του 1<sup>ου</sup> Γυμνασίου συμφώνησαν με τον ιδιοκτήτη του κέντρου που ενοικίασαν να πληρώσουν 100€ για την αίθουσα και 1€ για κάθε άτομο που θα πάει στο χορό. Οι μαθητές του 3<sup>ου</sup> Γυμνασίου για το δικό τους χορό ισχυρίζονται ότι έκαναν καλύτερη συμφωνία την οποία όμως δεν ήθελαν να αποκαλύψουν. Έδωσαν παρόλα αυτά την εξής πληροφορία:

«αν τριπλασιάσουμε την τιμή που θα πληρώσετε εσείς και αφαιρέσουμε το διπλάσιο του αριθμού των ατόμων που θα πάρουν μέρος στο δικό σας χορό τότε προκύπτει ο αριθμός 500». Τελικά όταν συναντήθηκαν μετά το τέλος και των δύο εκδηλώσεων διαπίστωσαν με έκπληξη ότι το ποσό που πλήρωσαν οι μαθητές και των δύο σχολείων ήταν ακριβώς το ίδιο. Μπορείτε να βρείτε το ποσό που πλήρωσαν και πόσα άτομα πήγαν στο χορό κάθε σχολείου;

1. Βρείτε τη σχέση-εξίσωση που συνδέει την τιμή  $y$  που θα πληρώσουν οι μαθητές κάθε σχολείου και τα άτομα  $x$  που θα συμμετάσχουν σε κάθε χοροεσπερίδα.

..... εξίσωση (1)

..... εξίσωση (2)

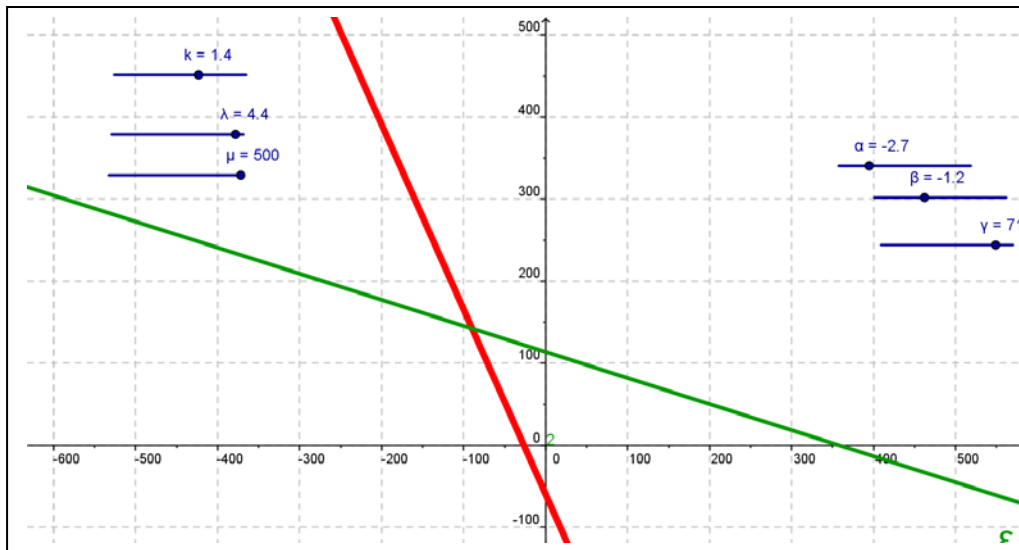
- Πώς ονομάζονται οι παραπάνω εξισώσεις;.....
- Πόσες λύσεις έχει κάθε μία από αυτές;.....
- Τι γραφική παράσταση έχουν οι εξισώσεις αυτές;.....
- Γράψτε τις εξισώσεις (1) και (2) με τη μορφή:  $ax+by=\gamma$

....., εξίσωση (1)

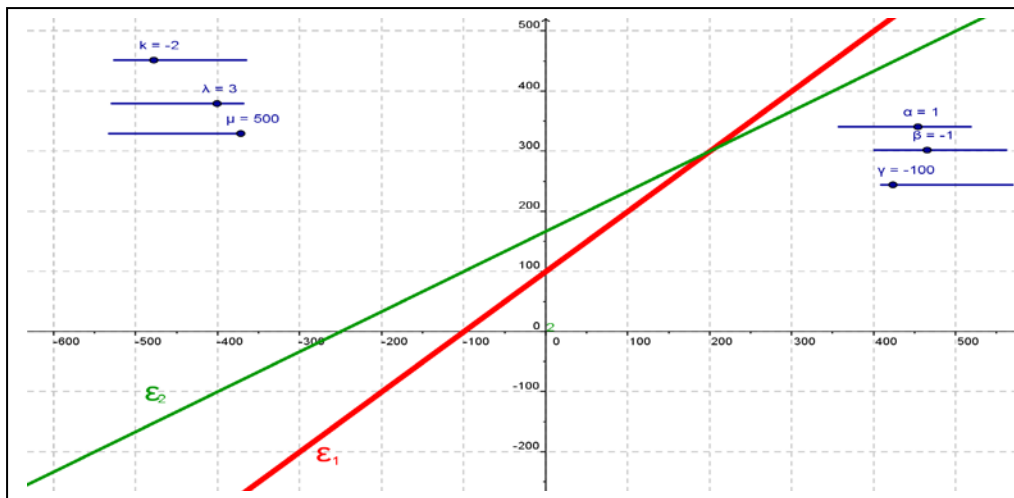
....., εξίσωση (2)

2. Ανοίξτε το αρχείο «σχολικός χορός» και μετακινήστε κατάλληλα τους δρομείς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  ώστε οι δύο ευθείες του σχήματος να είναι η γεωμετρική έκφραση - παράσταση των εξισώσεων που βρήκατε στο 1<sup>ο</sup> ερώτημα.

(Ανοίγοντας το αρχείο του λογισμικού η εικόνα που εμφανίζεται στους μαθητές περιλαμβάνει δύο ευθείες με παραμετρικές εξισώσεις:  $ax+by=\gamma$  και  $kx+\lambda y=\mu$ , καθώς και τους δρομείς  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  μέσω των οποίων μπορούν να μεταβάλλουν τις εξισώσεις των ευθειών, σχήμα 1. Οι μαθητές πρέπει τοποθετώντας τους δρομείς στις κατάλληλες θέσεις να απεικονίσουν τις ευθείες  $e_1$ ,  $e_2$  με εξισώσεις 1, 2, σχήμα 2.)



Σχήμα 1: Αρχική εικόνα – Τυχαίες ευθείες



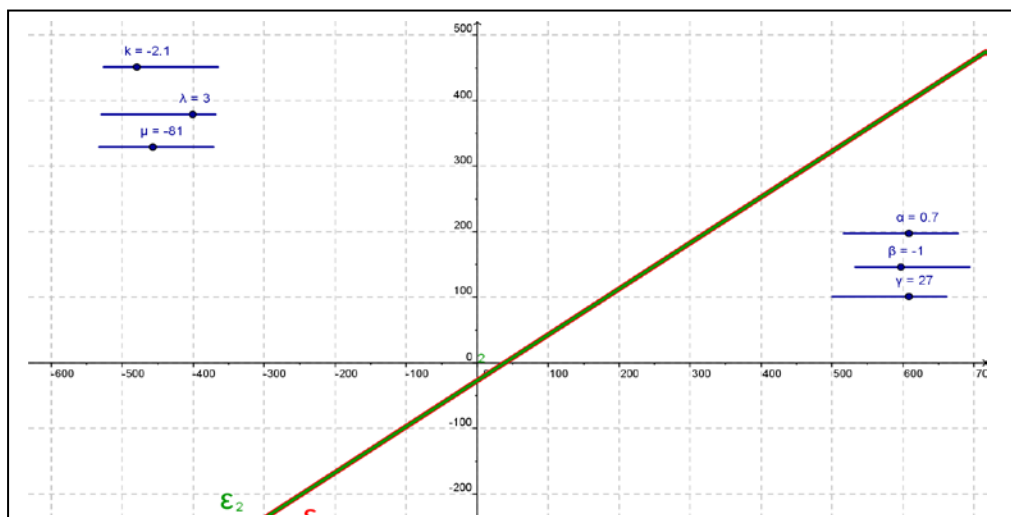
Σχήμα 2: Τεμνόμενες ευθείες με εξισώσεις (1), (2) – Σύστημα με μοναδική λύση

3. Δίνονται τα σημεία (50,-150), (100,330), (100,-100) και (200,300). Να αποτυπώσετε τα σημεία στο σύστημα αξόνων και στη συνέχεια να αντικαταστήσετε τις συντεταγμένες των σημείων στις εξισώσεις (1),(2).

Συμπληρώστε με ναι, όχι, ή την κατάλληλη φράση τον παρακάτω πίνακα, καθώς και ένα δικό σας σημείο για κάθε περίπτωση:



6. Μπορείτε να μετακινήσετε τώρα τους δρομείς ώστε το σύστημα που θα παριστάνουν οι ευθείες να είναι αόριστο; Δηλαδή, να έχει άπειρες λύσεις; Ποια η σχετική θέση των ευθειών σ' αυτή την περίπτωση;



Σχήμα3: Οι ευθείες συμπίπτουν – Αόριστο σύστημα

## ΟΡΙΣΜΟΙ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

● Αν έχουμε δύο γραμμικές εξισώσεις, με δύο αγνώστους  $x, y$

$$\begin{cases} \alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma \\ \kappa \cdot x + \lambda \cdot y = \mu \end{cases}$$

και αναζητούμε το ζεύγος των αριθμών  $(x, y)$  που είναι ταυτόχρονα λύση και των δύο εξισώσεων, τότε λέμε ότι έχουμε να επιλύσουμε ένα **γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$** .

● **Λύση** ενός γραμμικού **συστήματος** λέγεται κάθε ζεύγος αριθμών  $(x, y)$  που επαληθεύει τις εξισώσεις αυτού του συστήματος.

● Όταν αναζητούμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με

$$\begin{cases} \alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma \\ \kappa \cdot x + \lambda \cdot y = \mu \end{cases}$$

δύο αγνώστους  $x, y$

είναι ισοδύναμο με το να αναζητούμε το κοινό σημείο των ευθειών  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  με εξισώσεις:

$$\varepsilon_1: \alpha \cdot x + \beta \cdot y = \gamma \text{ και } \varepsilon_2: \kappa \cdot x + \lambda \cdot y = \mu$$

Έτσι όταν:

- Το σύστημα έχει **μοναδική λύση** τότε **οι ευθείες τέμνονται** και η λύση αυτή είναι το ζεύγος αριθμών που είναι οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών.
- Το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις (αόριστο)** τότε **οι ευθείες συμπίπτουν** (ταυτίζονται) και λύσεις είναι όλα τα σημεία τους, αφού όλα είναι κοινά σημεία.
- Το σύστημα **δεν έχει λύση (αδύνατο)** τότε **οι ευθείες είναι παράλληλες** και δεν έχουν κοινά σημεία.

## Βιβλιογραφία

- Ainley, J. & Pratt, D. (2002). *Purpose and Utility in Pedagogic Task Design*. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds). *Proceeding of the 26<sup>th</sup> annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2. pp. 17-25). Norwich UK: PME.
- Αργυράκης, Δ., κ.α. (2010). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου* (σελ. 128-132). Αθήνα: ΟΕΔΒ.
- Αργυράκης, Δ., κ.α. (2010). *Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου Βιβλίο Εκπαιδευτικού* (σελ. 57-58). Αθήνα: ΙΤΥΕ –ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.
- Condie, R. & Mumro, B. (2007). *The impact of ICT in schools a landscape review*. BECTA.
- Ιωάννου, Σ. κ.α. (2010) *Επιμορφωτικό υλικό για την εκπαίδευση των επιμορφωτών - Ειδικό μέρος Ειδικότητα ΠΕ03*.
- Κυνηγός, Χ., κ.α. (2010). *Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης*. Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕ03, Β' έκδοση Αναθεωρημένη & Εμπλουτισμένη. Πάτρα: ΙΤΥ
- Σταυρίδου, Ε. (2000). *Συνεργατική Μάθηση στις Φυσικές Επιστήμες, Μια Εφαρμογή στο Δημοτικό Σχολείο*. Βόλος: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Θεσσαλίας.